विषय वस्तु

क्र	अध्याय	पेज नंबर
1.	संख्या पद्धति (Number system)	1 - 27
	(i) संख्याओं का सामान्य ज्ञान	
	(ii) संख्याओं के प्रकार	
	(iii) परिमेयकरण	
	(iv) भाजकता का नियम	
	(v) इकाई अंक की गणना	
	(vi) महत्तम सापवर्तक और लघुत्तम समापवर्त्य	
	(vii) घातांक	
	(viii) युक्लिड विभाजन प्रमेयिका	
	(ix) शेषफल की गणना	
	(x) अभ्यास प्रश्न	
2.	ज्यामिति (Geometry)	28 – 91
	(i) बिंदु, रेखा और उसके प्रकार	
	(ii) कोण और कोणों के प्रकार	
	(iii) बहुभुज	
	(iv) त्रिभुज और त्रिभुज के प्रकार	
	(v) त्रिभुज के केन्द्र (केन्द्रक, अंत: केन्द्र, बहीष्केन्द्र, लम्बकेन्द्र)	
	(vi) त्रिभुजों की सर्वांगसमता तथा समरुपता	
	(vii) त्रिभुजों का परिमाप एवं क्षेत्रफल	
	(viii) चतुर्भुज (वर्ग, आयत, समचतुर्भुज, समलम्बचतुर्भुज समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज, समान्तर चतुर्भुज)	
	(ix) वृत .	
	(x) चक्रिय चतुर्भुज	
	(xi) वृत्तों की सापेक्ष स्थितियाँ	
	(xii) अभ्यास प्रश्न	
3.	क्षेत्रमिति (Mensuration)	92 – 120
	(i) द्विविमिय आकृतियों की क्षेत्रमित्रि	
	a. त्रिभुज	
	b. चतुर्भुज	
	c. बहुभुज.	
	d. वृत	

(ii) पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन

a. घन

b. घनाभ

c. गोला

d. बेलन

e. शंकु

f. छिन्नक

g. प्रिज्म

h. पिरैमिड

i. एक आकृति से दुसरी आकृति में परिवर्तन

(iii) अभ्यास प्रश्न

4. बीजगणित (Algebra) 121 – 223

(i) बहुपद

a. बीजीय व्यंजक : परिभाषा और प्रकार.

b. बीजीय व्यंजकों पर गणितीय संक्रियाएँ

c. बहुपद के शून्यक

d. बहुपद के गुणाकों तथा शून्यकों में सम्बन्ध

e. गुणनखण्डन

f. समीकरण

g. दो चरो वाले रैखिक समीकरण

h. अभ्यास प्रश्न

(ii) द्विघात से सम्बधित परिभाषाएँ

a. द्विघात से सम्बधित परिभाषाएँ

b. समीकरण के मूल

c. मूलों की संख्या, संबंध व प्रवृत्ति

d. द्विघात व्यंजकों के चिह्न

e. मूलों से द्विघात समीकरण ज्ञात करना

f. एक समीकरण के मूलों के पदों में दूसरी समीकरण

g. दो द्विघात समीकरण के मूलों में सम्बन्ध..

h. अभ्यास प्रश्न

(iii) सम्मिश्र संख्या

a. सम्मिश्र संख्या का सामान्य परिचय

b. सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित

c. संयुग्मी सम्मिश्र संख्या

d. समिश्र संख्याओं का मापाक व कोणाक

e. सम्मिश्र संख्याओं का ज्यामितिय निरूपण

f. अतिपरवलयिक फलन

g. प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलन

h. आयलर प्रमेय

i. द:मायवर प्रमेय

j. सम्मिश्र संख्याओं के मूल

k. इकाई के nवें मू व घनमूल

l. अभ्यास प्रश्न

(iv) श्रेणी (Series)

a. समान्तर श्रेढ़ी .

b. समान्तर माध्य

c. गुणोत्तर श्रेढ़ी

d. गुणोत्तर माध्य

e. समान्तरीय–गुणोत्तर श्रेढ़ी

f. अभ्यास प्रश्न

(v) क्रमचय तथा संचय

a. क्रम गुणित

b. क्रमचय

c. संचय

d. अभ्यास प्रश्न

(vi) द्विपद प्रमेय

a. द्विपद प्रसार

b. पास्कल त्रिभुज व न्यूटन के अनुसार द्विपद प्रकार .

c. व्यापक व मध्य पद

d. महत्तम गुणांक वाला पद

e. सन्निकट मान

f. अभ्यास प्रश्न

5. मैट्रिक्स एवं सारणिक (Matrix and determinant) 224 – 250

(i) मैट्रिक्स (Matrix)

a. मैट्रिक्स के प्रकार

b. मैट्रिक्स पर संक्रियाएँ

c. परिवर्त मैट्रिक्स

d. मैट्रिक्स की ट्रेस

(ii) सारणिक (determinant)

a. सारणिक के प्रकार व गुणधर्म

b. सहखण्ड मैट्रिक्स

c. प्रतिलोम/व्युत्क्रमणीय आव्यूह

d. मैट्रिक्स तथा सारणिक के अनुप्रयोग

(iii) अभ्यास प्रश्न

6. समुच्चय, सम्बन्ध और प्रतिचित्रण (sets, relation and mapping) 251 – 292

(i) सम्मुच्चय (sets)

a. समुच्चय सिद्धान्त व निरुपण

b. समुच्चय के प्रकार

c. समुच्चय पर संक्रियाएँ

d. वेन आरेख

e. क्रमित युग्म

(ii) सम्बन्ध (Relation)

a. सम्बन्धों के प्रकार

b. दो सम्बन्धों का संयोजन

c. सर्वागंसम मापाँक व तुल्यता कक्ष

(iii) फलन (Function)

a. फलन का निरूपण व गुणधर्म

b. फलन का प्रान्त, सहप्रान्त तथा परिसर

c. फलनो के प्रकार

d. प्रतिलोभ फलन

e. कुछ मानक फलनो के ग्राफ

f. फलनो का वर्गीकरण

h. अतिपरवलयिक फलन

g. त्रिकोणमिति फलन

(iv) अभ्यास प्रश्न

7. त्रिकोणमिती (Trigonometry) 293 – 339

(i) सरल त्रिकोणमिती

a. कोण एवं उनका मापन

b. त्रिकोणमितिय अनुपात

c. मूलभूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

d. त्रिकोणमिति फलनों के प्रानत तथा परिसर

e. त्रिकोणमितिय अनुपातों में सम्बन्ध

f. त्रिकोणमितिय फलनों के ग्राफ

g. आवर्ती फलन

(ii) ऊँचाई एवं दूरी (Height and distance)
a. उन्नयन व अवनमन कोण
b. त्रिभुज के कोणों के आधार पर भुजाओं में अनुपातक सम्बंध
(iii) उच्च त्रिकाणमिति (Higher trigonometry)
a. त्रिकोणमिति से सम्बंधित महत्तवपूर्ण सूत्र व परिणाम
b. त्रिकोणमिति समीकरण के व्यापक हल
c. त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों के मध्य सम्बन्ध
(iv) प्रतिलाम त्रिकोणमितिय फलन (Inverse Trigonometric function)
a. प्रतिलोम फलनों का परिसर
b. प्रतिलोम त्रिकोणमितिय फलनां के बीच संबंध
c. प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के लिए ग्राफ
(v) अभ्यास प्रश्न

8. विश्लेषणात्मक ज्यामिति (Analytical geometry) 340 – 448
(i) द्विविमिय निर्देशांक ज्यामिति (2-d Geometry)
a. बिन्दु
b. बिन्दु पथ
c. सरल रेखा
d. सरल रेखा युग्म
e. वृत तथा वृत निकाय
g. परवलय
h. दीर्घव्त व अतिपरवलय
(ii) त्रिविमिय निर्देशांक ज्यामिति
a. बिन्दु
b. रेखा
c. समतल
d. अभ्यास प्रश्न

9. कलन (calculus) 449 – 569
(i) अवकलन (differential cocculus)
a. सीमा (limit)
b. सांतत्य (continuity)
c. अवकनीयता (differentiability)
d. अवकलन (differential)
e. अवकलन के अनुप्रयोग (Application of derivatives)

(ii) समाकलन (Integration)

a. अनिश्चित समाकलन

b. निश्चित समाकलन

c. समाकलन के अनुप्रयोग

10. सदिश बीजगणित (vector algebra) 570 – 612

(i) संदिश

a. अदिश व सदिश राशिया व अनके प्रकार

b. सदिशों का योग व व्यवकलन

c. विभाजन बिन्दु

(ii) सदिश गुणन

a. दो सदिशो का अदिश गुणन या बिन्दु गुणन

b. दो सदिशो का सदिश गुणन या वज्र गुणन

c. तीन व चार सदिशों का गुणनफल

(iii) अभ्यास प्रश्न

11. सांख्यिकी और प्रायिकता (Statistics and probability) 613 – 656

(i) सांख्यिकी (Statistics)

a. सांख्यिकी की परिभाषा व प्रकार

b. वर्गीकरण तथा बारंबारता बंटन

c. सांख्यिकी माध्य अथवा केन्द्रीय प्रवृति के माप

d. माध्यिका

e. बहुलक

f. विभाजन मूल्य

g. विक्षेपण

h. माध्यविचलन

(ii) प्रायिकता (Probability)

a. प्रायिकता

b. प्रायिकता बटन

c. द्विपद बंटन/बश्नोलीपरीक्षण

♦ ♦ ♦ ♦

संख्या पद्धति (Number System)-

– गणित की वह शाखा जिसमें संख्याओं और उनके विभिन्न गुणधर्मों का अध्ययन किया जाता है, संख्या पद्धति (Number System) कहलाती है।

संख्याओं का सामान्य ज्ञान

अंक (Digit)-

– संख्याओं को लिखने के लिए कुछ विशेष संकेतों (अंकों) का प्रयोग किया जाता है, जिन्हें **अंक (Digit)** कहते हैं।

– हमारे दैनिक जीवन में 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – ये दस अंक प्रयोग किए जाते हैं।

– इन 10 अंकों पर आधारित संख्या पद्धति को दशमलव पद्धति (Decimal System) कहा जाता है।

संख्या (Number)-

– संख्या वस्तुओं की मात्रा को प्रदर्शित करने का एक माध्यम होती है।

उदाहरण: 5 आदमी, 3 कलम, 3.8 फीट ऊँचाई आदि।

– संख्या, अंकों के समूह से मिलकर बनती है। इसमें अंकों की स्थिति के आधार पर उनके मान निर्धारित होते हैं, जैसे:

– दाएँ से बाएँ**:** इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार आदि।

उदाहरण:

(1) **123321 को शब्दों में लिखा जाए तो** = एक लाख तेइस हजार तीन सौ इक्कीस।

(2) **ग्यारह लाख दो हजार बाईस** को अंकों में लिखा जाए तो = **1102022**।

Note:

(i) अंक अकेला (single digit) होता है।

(ii) संख्या कई अंकों के समूह से बनती है।

अंक का वास्तविक मान और स्थानीय मान-

1. अंक का वास्तविक मान / शुद्ध मान / जातीय मान / अंकित मान (Face Value)

– किसी भी अंक का वास्तविक (Face) मान वह होता है जो कभी नहीं बदलता।

– किसी संख्या में किसी अंक का शुद्ध मान वही होता है जो उसका मूल अंक होता है, चाहे वह किसी भी स्थान पर हो।

उदाहरण: संख्या 269 में –

2 का जातीय मान = 2

6 का जातीय मान = 6

9 का जातीय मान = 9

2. स्थानीय मान / स्थानिक मान (Place Value)

– किसी संख्या में कोई अंक जिस स्थान पर स्थित होता है, वही उसका स्थानीय मान कहलाता है।

– स्थानीय मान = अंक × स्थान का मान

उदाहरण: संख्या 456 में –

6 का स्थानीय मान = 6 × 1 = 6

5 का स्थानीय मान = 5 × 10 = 50

4 का स्थानीय मान = 4 × 100 = 400

Note:

(i) 0 (शून्य) का स्थानीय मान और जातीय मान हमेशा 0 होता है, चाहे वह किसी भी स्थान पर हो।

(ii) किसी भी संख्या के इकाई अंक का जातीय मान और स्थानीय मान समान होता है।

संक्षिप्त रूप में:

– **जातीय मान (Face Value)** हमेशा अंक के मूल मान के बराबर होता है।

– **स्थानीय मान (Place Value)** अंक के स्थान के अनुसार बदलता है।

संख्याओं का वैज्ञानिक निरूपण-

संख्या	गुणनखंड	घातांक रूप
एक	1	10^0
दस	10	10^1
सौ	100	10^2
हजार	1,000	10^3
दस हजार	10,000	10^4
लाख	1,00,000	10^5
दस लाख	10,00,000	10^6
करोड़	1,00,00,000	10^7
दस करोड़	10,00,00,000	10^8
अरब	1,00,00,00,000	10^9
दस अरब	10,00,00,00,000	10^{10}
खरब	1,00,00,00,00,000	10^{11}
दस खरब	10,00,00,00,00,000	10^{12}
नील	1,00,00,00,00,00,000	10^{13}

दशांश (Decimal Fractions) का वैज्ञानिक निरूपण-

संख्या	भिन्न रूप	घातांक रूप
एक का 10वाँ भाग	1/10	10^{-1}
एक का 100वाँ भाग	1/100	10^{-2}
एक का 1000वाँ भाग	1/1000	10^{-3}

अंकों के आधार पर संख्याओं का वर्गीकरण-

अंकों की संख्या	कुल संख्याएँ	सबसे छोटी संख्या	सबसे बड़ी संख्या
1 अंक	9	1	9
2 अंक	90	10	99
3 अंक	900	100	999
4 अंक	9000	1000	9999

संख्याओं की निरंतरता-

बड़ी संख्या +1	अगली सबसे छोटी संख्या	उदाहरण
दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या +1	तीन अंकों की सबसे छोटी संख्या	99+1=100
तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या +1	चार अंकों की सबसे छोटी संख्या	999+1=1000
चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या +1	पाँच अंकों की सबसे छोटी संख्या	9999+1=10000

1 से 100 तक की संख्याओं में विशेष गणना-

विशेष गणना	संख्या
कुल शून्य की संख्या	11
अंक "1" की कुल संख्या	21
अन्य प्रत्येक अंक (2-9) की संख्या	20
1 से 100 तक की कुल अंकों की संख्या	192

Note:

(i) शून्य को सबसे छोटी संख्या नहीं माना जाता, क्योंकि यह एक अंक है लेकिन गणनीय संख्या (Natural Number) नहीं है।

(ii) "संख्या" शब्द का अर्थ प्राकृतिक (गणनीय) संख्याओं से होता है।

दशमलव संख्या का प्रसार -

1. 5923
 =5000+900+20+3
 =5 हजार +9 सैकड़ा +2 दहाई +3 इकाई
 =5×1000+9×100+2×10+3×1
 $=5\times10^3+9\times10^2+2\times10^1+3\times10^0$
2. 2542035
 =2 दस लाख +5 लाख +4 दस हजार +2 हजार +0 सैकड़ा +3 दहाई +5 इकाई
 $=2\times10^6+5\times10^5+4\times10^4+2\times10^3+0\times10^2+\times10^1+5\times1$
3. 23.425
 =2 दहाई + 3 इकाई + 4 इकाई का 10 वाँ भाग + 2 इकाई का 100 वाँ भाग + 5 इकाई का 1000 वाँ भाग
 =2×10+3×1+4×1/10+2×1/100+5×1/1000
 $=2\times10^1+3\times10^0+4\times10^{-1}+2\times10^{-2}+5\times10^{-3}$

संख्या लेखन तथा गठन

- **संख्या लेखन तथा गठन की मुख्य तीन पद्धतियाँ हैं-**
 (i) भारतीय पद्धति
 (ii) अंग्रेजी पद्धति
 (iii) रोमन पद्धति

1. भारतीय पद्धति (Indian System):

- भारतीय पद्धति में संख्या को विभिन्न विभाजनों में बाँटकर लिखा जाता है। इसमें इकाई, दहाई, हजार, लाख और करोड़ का प्रयोग होता है। इन विभाजनों के बीच अल्प विराम (comma) का प्रयोग किया जाता है।

विशेषताएँ:

- हजार (thousands) के बाद अल्प विराम आता है, जो तीसरे अंक से पहले होता है।
- फिर लाख (lakhs) के बाद दो अंकों के बाद अल्प विराम आता है।
- करोड़ (crore) के बाद भी दो अंकों के बाद अल्प विराम आता है।

उदाहरण:

1. **51,754** = इक्यावन हजार सात सौ चौवन
2. **46,54,572** = छियालीस लाख चौवन हजार पाँच सौ बहत्तर
3. **85,43,55,540** = पचासी करोड़ तैतालीस लाख पचपन हजार पाँच सौ चालीस

भारतीय पद्धति के अनुसार संख्या का गठन-

1 दहाई	= 10 इकाईयाँ	
1 सैकड़ा	= 10 दहाईयाँ	= 100 इकाईयाँ
1 हजार	= 10 सैकड़ा	= 1000 इकाईयाँ
1 लाख	= 100 हजार	= 10000 सैकड़ा
1 करोड़	= 100 लाख	= 10000 हजार

संख्याओं में शून्यों की संख्या

संख्या	शून्य की संख्या
1 हजार	1000 (3 शून्य)
10 हजार	10000 (4 शून्य)
1 लाख	100000 (5 शून्य)
10 लाख	1000000 (6 शून्य)
1 करोड़	10000000 (7 शून्य)
10 करोड़	100000000 (8 शून्य)
1 अरब	1000000000 (9 शून्य)
10 अरब	10000000000 (10 शून्य)
1 खरब	100000000000 (11 शून्य)
10 खरब	1000000000000 (12 शून्य)

उदाहरण:

1. निम्नलिखित चार संख्याओं को अवरोही क्रम में लिखें:
I. 203567, II. 203657, III. 203756, IV. 203675

(a) I, II, III, IV (b) III, IV, II, I
(c) I, II, IV, III (d) III, II, I, IV **[b]**

व्याख्या: -

I. 203567 – (4)
II. 203657–(3)
III. 203756 – (1)
IV. 203675 – (2)
अवरोही क्रम (घटते क्रम) - III, IV, II, I

2. एक करोड़ बराबर है –

(a) 100 लाख के (b) 10 लाख के
(c) 100 हजार के (d) 1000 लाख के **[a]**

व्याख्या: -

100 हजार =1 लाख
100 लाख =1 करोड़
अर्थात् 100 × 100000 = 10000000 (1 करोड़)

3. संख्या 3 करोड़ 7 लाख 3 हजार 9 सौ अठासी को अंकों में लिखने पर प्राप्त होता है।

(a) 390004988 (b) 3900400988
(c) 3007049078 (d) 30703988 **[d]**

व्याख्या: -

3 करोड़ +7 लाख + 3 हजार 9 सौ + अठयासी
30000000+700000 + 3000+900+88 = 30703988

4. दस हजार + दस इकाई + दस दहाई बराबर है-

(a) 10110 (b) 11010
(c) 10011 (d) 101010 **[a]**

व्याख्या: -

दस हजार + दस इकाई + दस दहाई
= 10 × 1000+10×1+10×10
= 10000+10+100 = 10110

2. अर्न्तराष्ट्रीय (अंग्रेजी) पद्धति (International System):

– अंतरराष्ट्रीय पद्धति में इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार, मिलियन आदि का प्रयोग किया जाता है। इसमें संख्याओं के बीच अल्प विराम (comma) का प्रयोग प्रत्येक तीन अंकों के बाद किया जाता है।

विशेषताएँ:

– अल्प विराम सबसे पहले हजार के बाद आता है और फिर मिलियन के बाद।
– यह पद्धति अधिकतर अंतरराष्ट्रीय गणनाओं और वित्तीय दस्तावेजों में प्रयुक्त होती है।

संख्याएँ:

– 1 मिलियन = 10 लाख = 1,000,000 (6 जीरो)
– 1 बिलियन = 1 अरब = 1,000,000,000 (9 जीरो)
– 1 ट्रिलियन = 10 खरब = 1,000,000,000,000 (12 जीरो)

उदाहरण:

1. 22,051,965 = बाईस मिलियन, इक्यावन हजार, नौ सौ पैंसठ
2. 1,000,000 = एक मिलियन
3. 5,000,000,000 = पाँच बिलियन
4. 10,000,000,000,000 = एक ट्रिलियन

3. रोमन पद्धति (Roman System):

– रोमन अंक प्राचीन रोम की संख्या प्रणाली है, जिसमें लेटिन भाषा के अक्षरों का प्रयोग संख्याएँ व्यक्त करने के लिए किया जाता था। रोमन अंकों में I, V, X, L, C, D, M मुख्य संकेत होते हैं।

विशेषताएँ:

– I, X, C, M संकेतों को अधिकतम तीन बार लिखा जा सकता है।
– V, L, D संकेत दोहराए नहीं जाते हैं और न ही इन्हें घटाया जा सकता है।
– यदि बड़ी संख्या पहले लिखी जाती है, तो बाद में आने वाली संख्या को जोड़ते हैं।
– यदि बड़ी संख्या बाद में लिखी जाती है, तो उसे घटाकर लिखा जाता है।

रोमन अंक संकेत (Roman Numerals)

संकेत	मान	संकेत	मान
I	1	**C**	100
V	5	**D**	500
X	10	**M**	1000
L	50		

संख्याओं का जोड़ने और घटाने का तरीका:

1. **यदि बड़ी संख्या पहले लिखी जाती है तो उसे जोड़ते हैं:**
XIV = 10 + 4 = 14
XXIX = 10 + 10 + 9 = 29
LX = 50 + 10 = 60
CX = 100 + 10 = 110
MC = 1000 + 100 = 1100
DIX = 500 + 9 = 509
CXXIV = 100 + 10 + 10 + 4 = 124

2. **यदि बड़ी संख्या बाद में लिखी जाती है, तो उसे घटाते हैं:**
XC = 100 – 10 = 90
CD = 500 – 100 = 400
CM = 1000 – 100 = 900

उदाहरण:

1. **IV** = 4 (5 - 1)
2. **IX** = 9 (10 - 1)
3. **XIII** = 13 (10 + 3)
4. **XXI** = 21 (10 + 10 + 1)

संख्याओं के प्रकार

1. प्राकृत संख्या (Natural Numbers)-

- जिन संख्याओं से गिनती की क्रिया की जाती है उन्हें प्राकृत संख्या कहते है।
- इन्हें ' N ' से दर्शाते हैं।
- प्राकृत संख्याऐं अनन्त होती है।
- N={1,2,3,4,5,6,7...}

2. पूर्ण संख्या (Whole Numbers)-

- प्राकृत संख्याओं में 0 (शून्य) को शामिल करने के बाद संख्याओं का जो समुच्चय बनता है उन्हें पूर्ण संख्याएँ कहते हैं।
- इन्हें W से दर्शाते हैं।
- W={0,1,2,3,4,5...}

3. पूर्णांक संख्याएँ (Integer Numbers)-

- जब पूर्ण संख्याओं को धनात्मक और ऋणात्मक चिह्नों के द्वारा दर्शाया जाता है तो इनसे बना समुच्चय पूर्णांक संख्याएँ कहलाती है।
- इन्हें Z से दर्शाते हैं।
- Z=(...−4,−3,−2,−1,0,1,2,3,4...)
- **पूर्णांक =पूर्ण + अंक** अर्थात जो संख्याएँ पूरे -पूरे अंकों में हों चाहे वे धनात्मक हों या ऋणात्मक हों।

जैसे- ...-4, -3, -2, -1, **0**, 1, 2, 3, 4, ...

← मान घटता हैं **न्यूट्रल** मान बढ़ता हैं →

- जैसे-जैसे धनात्मक की ओर बढ़ते हैं वैसे-वैसे संख्या का मान बढ़ता जाता है जैसे- 5 और 7 में 7 बड़ा है।
- जबकि जैसे-जैसे ऋणात्मक की ओर बढ़ते हैं वैसे-वैसे संख्या का मान घटता जाता है जैसे- -5 और -7 में -5 बड़ा है।

Note:-

- 0 न्यूट्रल संख्या है इस पर न तो धनात्मक चिन्ह होता है न ही ऋणात्मक चिन्ह होता है।
  1. सबसे बड़ा ऋण पूर्णांक -1 होता है।
  2. सबसे छोटा ऋण पूर्णांक −∞ होता है।

4. भाज्य संख्याएँ या यौगिक संख्याएँ या संयुक्त संख्याएँ (Composite Numbers)-

- वे प्राकृत संख्याएँ जो 1 व अपने अलावा किसी अन्य संख्या से भी विभाजित हो सकें अर्थात् जिनके आसानी से अन्य अभाज्य गुणनखण्ड (टुकड़े) हो सकें भाज्य संख्याएँ कहलाती है।
- जैसे- 4,6,8,10,12,14,15

5. रूढ़ संख्याएँ या अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers)-

- वे प्राकृत संख्याएँ जो केवल स्वयं से या 1 से विभाजित हों अन्य से नहीं अर्थात् जिनके आसानी से अन्य अभाज्य गुणनखण्ड (टुकड़े) नहीं हो सके अभाज्य संख्याएँ कहलाती है।
  जैसे–2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31......
- नीचे दी गई तालिका में 1 से 200 तक की सीमा में अभाज्य संख्याओं की संख्या को दर्शाया गया है:

सीमा (N तक)	अभाज्य संख्याओं की संख्या
1 से 25	9
1 से 50	15
1 से 75	21
1 से 100	25
1 से 125	30
1 से 150	35
1 से 175	40
1 से 200	46

अभाज्य संख्या (रूढ़ संख्या) का पता लगाना -

- सबसे पहले दी गई संख्या से ठीक बड़ी वर्ग संख्या को ढूँढ़ते हैं कि वह किस संख्या की वर्ग संख्या है फिर प्राप्त संख्या से छोटी संख्याओं से बारी-बारी से दी गई संख्या में भाग देकर देखते हैं यदि किसी भी संख्या का भाग चला जाए तो वह भाज्य संख्या है अन्यथा अभाज्य संख्या होगी।

अभाज्य और भाज्य संख्याओं से संबंधित महत्वपूर्ण बिंदुओं -

1. 1 न तो भाज्य संख्या है, ना ही अभाज्य संख्या है।
2. 2 एकमात्र सम संख्या जो अभाज्य है।
3. 2 के अलावा सभी सम संख्याएँ भाज्य होती है।
4. 2 प्रथम अभाज्य संख्या है।
5. 3 प्रथम विषम संख्या जो अभाज्य है।
6. 4 प्रथम भाज्य संख्या है
7. 9 प्रथम विषम संख्या जो भाज्य है।
8. 2 अंकों की सबसे छोटी अभाज्य संख्या 11 है।
9. 2 अंकों की सबसे बड़ी अभाज्य संख्या 97 है।
10. 3 अंकों की सबसे छोटी अभाज्य संख्या 101 है।
11. 3 अंकों की सबसे बड़ी अभाज्य संख्या 997 है।

उदाहरण: 349 भाज्य संख्या है या अभाज्य संख्या बताओ-

व्याख्या: -

349 से ठीक बड़ी वर्ग संख्या 361 है जो 19 की वर्ग है। अब 19 से छोटी अभाज्य संख्याएँ 2,3,5,7,11,13,17 है। 349 इनमें से किसी से विभाजित नहीं है अत: यह अभाज्य संख्या है।

6. सहअभाज्य संख्याएँ (Co-Prime Numbers)-

– जब दो प्राकृत संख्याओं का म. स. प. 1 हो तो वे दोनों संख्याएँ सहअभाज्य संख्याएँ कहलाती है।
जैसे- (2,5)(3,7)(4,9)... इत्यादि।

7. युग्म अभाज्य संख्याएँ (Twin Prime Numbers)-

– यदि दो अभाज्य संख्याओं में 2 का अन्तर हो तो, उन्हें युग्म अभाज्य संख्या कहते हैं।

– जैसे- (3,5)(5,7)(11,13)... इत्यादि।

8. सम-संख्याएँ (Even Numbers)-

– वे संख्याएँ जो दो से भाज्य हों सम संख्याएँ कहलाती हैं। अर्थात् जिनके अन्त में 0,2,4,6, व 8 हो।

– जैसे- 2,4,6,8,10,12 इत्यादि।

9. विषम संख्याएँ (Odd Numbers)-

– ऐसी संख्याएँ जो 2 से पूरी तरह विभाजित न हों विषम संख्याएँ कहलाती है। जैसे- 1,3,5,7 इत्यादि।

Note:-
दो सम संख्याओं का योग सदैव सम संख्या में व दो विषम संख्याओं का योग भी सदैव सम में होता है। जब की एक सम तथा एक विषम संख्या का योग सदैव विषम संख्या होता है।

10. पूर्ववर्ती या पूर्वग संख्या-

– दी गई संख्या से ठीक पहले (छोटी) संख्या पूर्ववर्ती संख्या कहलाती है

– जैसे- 752 की पूर्ववर्ती संख्या 751 है।

11. अनुवर्ती या उत्तरवर्त्ती या परवर्त्ती संख्या-

– दी गई संख्या से ठीक बाद (बड़ी) संख्या अनुवर्ती संख्या कहलाती है।

– जैसे- 16543 की अनुवर्ती संख्या 16544 है।

12. परिपूर्ण संख्या (Perfect number)-

– वह पूर्णांक जो अपने सभी गुणनखण्डों के योग के बराबर हो, परिपूर्ण संख्या कहलाती है। (गुणनखण्डों में स्वयं वह संख्या शामिल नहीं होती है।)

– जैसे- 28 एक परिपूर्ण संख्या है इसके गुणनखण्ड 14,7,4,2, 1 है। (14+7+4+2+1=28)

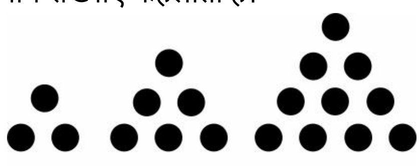
13. पैलिंड्रोम संख्या (Palindrome Numbers)-

– ऐसी संख्या जो बांयी ओर से और दांयी ओर से समान पढ़ी जा सके।

– जैसे - 23732

14. त्रिकोणीय संख्याऐं (Triangle Numbers) –

– त्रिभुज की तरह रचना करने वाली संख्याऐं त्रिकोण संख्या या त्रिकोणीय संख्याऐं कहलाती है।



3 6 10

– जैसे- 1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,66... इन संख्याओं को ध्यान से देखने पर पता लगता है कि इनका अन्तर एक अधिक होता जा रहा है।

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ...

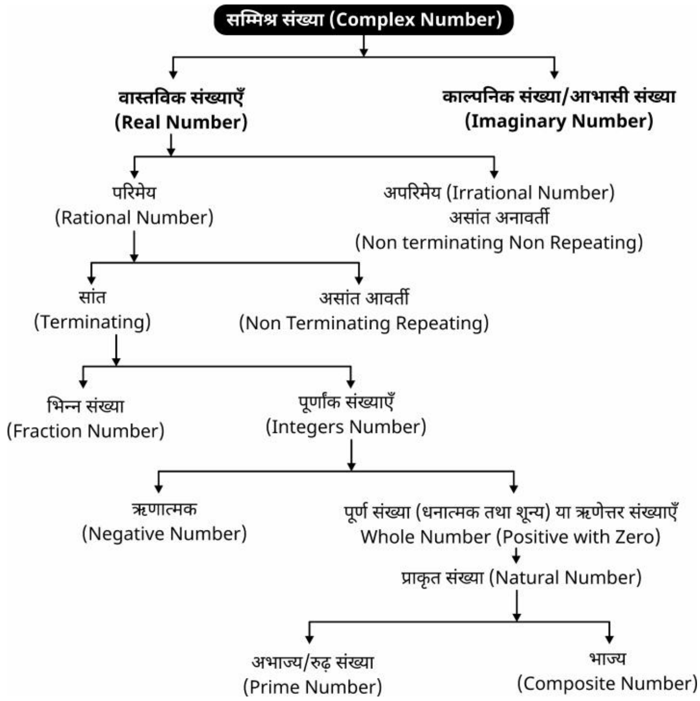
2 3 4 5 6 7 8

3, 2,6,10,15 3,21 6,28 7,36 8,··· -

15. त्रिक या त्रियक संख्याऐं (Triplet Numbers)-

– दो संख्याओं के वर्गों का योग, तीसरी संख्या के वर्ग के बराबर हो तो वे संख्याऐं त्रिक या त्रियक संख्याऐं कहलाती है इन्हें हम पाइथागोरस संख्याऐं भी कहते है।

– जैसे- (3,4,5),(5,12,13),....



16. वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers) –

– परिमेय और अपरिमेय संख्याओं के समुच्चय अथवा समूह को वास्तविक संख्याएँ कहते है, इन्हे i से प्रदर्शित करते है।

– जैसे- $\sqrt{7}, \frac{5}{4}, \sqrt{10}, \frac{3}{5}$

17. अवास्तविक संख्याएँ या काल्पनिक संख्याएँ (Imaginary numbers)-

– जो संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ नहीं है अर्थात् जिनकी मात्र कल्पना की जा सके। वे काल्पनिक संख्याएँ कहलाती है।

– जैसे- $\sqrt{-3}, \sqrt{-5}$

– ऋणात्मक संख्याओं का वर्गमूल परिभाषित नहीं है। अतः इन्हें अवास्तविक अथवा काल्पनिक संख्या कहते है।

18. परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers)-

– एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक (0 को छोड़कर) से भाग देने पर जो लघुत्तम प्राप्त हो उन्हें परिमेय संख्या (Rational Numbers) कहते है।

- जिनको p/q के रूप में लिखा जा सके। यहाँ $q \neq 0$
- कोई भी परिमेय संख्या दो पूर्णांको का अनुपात है, जिसका अंश कोई भी पूर्णांक हो सकता है तथा हर शून्य के अतिरिक्त कोई भी पूर्णांक हो सकता है।
- परिमेय संख्याओं के समुच्चय को Q से दर्शाते हैं।
- जैसे- 1,2,3,4,1/2,3,7,2/5 इत्यादि।
- **परिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार दो भागों में विभक्त किया जा सकता है।**

1. सांत दशमलव (Terminating Decimal)
2. असांत (अनवसानी) आवर्ती दशमलव (Non-Terminating Recurring Decimal)

1. सांत दशमलव (Terminating Decimal): वे परिमेय संख्यायें जो p/q ($q \neq 0$) के रूप में होती हैं तथा p मे q का भाग देने पर कुछ परिमित चरणों के पश्चात शेषफल शून्य हो जाता है, सांत दशमलव संख्या कहलाती हैं।

- जैसे: 3/4=0.75, 8/5=1.6, 5/8=0.625
- सांत परिमेय संख्या को भिन्न रूप में लिखने पर इसका हर भाग 2^m अथवा 5^n अथवा $2^m \times 5^n$ रूप में होता है, जहाँ m,n पूर्णांक संख्या है।
- एक परिमेय संख्या जिसका हर 2n×5m के रूप का हो तो जहाँ n,m पूर्णांक है तो इसे ऐसी परिमेय संख्या में परिवर्तित किया जा सकता जिसका हर 10 की धनात्मक पूर्णांक घात होगी।

जैसे- $\frac{7}{10} = \frac{7}{40} \times \frac{25}{25} = \frac{175}{1000} = 0.175$

$\frac{179}{25} = \frac{179}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{716}{100} = 7.16$

2. असांत आवर्ती दशमलव (Non-Terminating Recurring Decimal) :

- वे परिमेय संख्यायें जो p/q ($q \neq 0$) के रूप में होती हैं तथा p में q का भाग देने पर निश्चित चरणों के पश्चात शेष की पुनरावृत्ति होने लगती है जिससे दशमलव प्रसार निरन्तर जारी रहता है, असांत (अनवसानी) आवर्ती दशमलव संख्या कहलाती है।
- जैसे: 1/3=0.3333...= $0.\bar{3}$

  $\frac{1}{7} = 0.142857142857 = 0.\overline{142857}$
- असांत आवर्ती संख्याओं के दशमलव प्रसार में एक निश्चित क्रम में संख्याओं की पुनरावृत्ति होती रहती है अत: पुनरावृत्त संख्याओं को बार चिन्ह (0, $0.\bar{3}$) द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

  जैसे : $0\bar{3} = 333$

  $0.1\overline{57} = 0.1575757$

  $2.8354 = 2.8354354$

- यदि परिमेय संख्या का हर भाग $2^n \times 5^m$ के रूप में हो तो इस प्रकार प्राप्त परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार सांत होता है। यदि परिमेय संख्या का हर भाग 2n×5m के रूप में नही हो तो इस प्रकार प्राप्त परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होता है।
- जैसे: $\frac{5}{3} = 1.6666..............\frac{23}{6} = 3.8333...........$

> **Note:-**
> प्रत्येक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत होता है या असांत आवर्ती होता है।

19. अपरिमेय संख्याऐं (Irrational Numbers)-

- ऐसी संख्याऐं जिनको p/q के रूप में नहीं लिख सकें अपरिमेय संख्या कहलाती हैं।

(i) ऐसी दशमलव संख्याऐं जिनका कोई निश्चित अन्त न हो। अर्थात् न दोहराई जाने वाली असांत दशमलव भिन्नें

- जैसे –3.76549...

(ii) e एवं π अपरिमेय संख्या है।, π = 3.14159

(iii) अपूर्ण वर्ग संख्याऐं अपरिमेय संख्याऐं होंगी जैसे- $\sqrt{7}, \sqrt{11}$

- एक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार असांत अनावर्ती होता है।

असांत अनावर्ती दशमलव (Non Terminating, Non Recurring Decimal):

- वे संख्यायें जिनका दशमलव प्रसार बिना किसी निश्चित क्रम के निरन्तर (अन्तहीन) प्राप्त होता है, असांत (अनावसानी) अनावर्ती दशमलव संख्या कहलाता है।
- असांत अनावर्ती दशमलव संख्यायें, अपरिमेय संख्या होती है।
- इस प्रकार प्रत्येक वास्तविक संख्या के दशमलव प्रसार के प्रकार-

(i) सांत दशमलव (परिमेय)

(ii) असांत दशमलव

(a) असांत आवर्ती दशमलव (परिमेय)

(b) असांत अनावर्ती दशमलव (अपरिमेय)

परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं के बारे में कुछ महत्वपूर्ण बिन्दु-

- पूर्ण वर्ग संख्याऐं परिमेय संख्याऐं होंगी।
- 0 (शून्य) एक परिमेय संख्या है।
- प्रत्येक भिन्न परिमेय संख्या है
- सभी प्राकृत, पूर्ण, पूर्णांक संख्याएँ परिमेय संख्याऐं होंगी।
- सभी दशमलव भिन्न वाली संख्याऐं जिनमें दशमलव के बाद वाली संख्याओं परिमित (गणना योग्य) हो, परिमेय संख्याऐं होंगी। जैसे - 5.325,4.321

- अशांत आवर्ती दशमलव संख्याऐं अर्थात दशमलव के बाद वाली संख्याओं की पुनरावृत्ति हो रही हो परिमेय संख्याऐं होगी।
  जैसे - $0.5757575757\ldots\ldots = 0.\overline{57}$
  $3.333333333\ldots\ldots = 3.\overline{3}$
- दो परिमेय संख्याओं के बीच अनन्त परिमेय संख्याऐं होती है।
- दो अपरिमेय संख्याओं के बीच अनन्त परिमेय संख्याऐं होती है।
- दो परिमेय संख्याओं के बीच अनन्त अपरिमेय संख्याऐं होती है।
- दो अपरिमेय संख्याओं के बीच अनन्त अपरिमेय संख्याऐं होती है।
- प्रत्येक परिमेय संख्या का दशलमव प्रसार या तो सांत होगा या असांत आवर्ती होगा।
  विलोमत: वह संख्या जिसका दशमलव प्रसार सांत अथवा असांत आवर्ती होता है, परिमेय संख्या होती है।
- प्रत्येक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार असांत अनावर्ती होता है।
  विलोमतः वह संख्या जिसका दशमलव प्रसार असांत अनावर्ती हो, अपरिमेय संख्या होती है।
- दो परिमेय संख्याओं का योग सदैव एक परिमेय संख्या होती है।
- दो परिमेय संख्याओं का अन्तर सदैव एक परिमेय संख्या होती है।
- दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल सदैव एक परिमेय संख्या होती है।
- एक परिमेय संख्या तथा एक अपरिमेय संख्या का योग सदैव एक अपरिमेय संख्या होती है।
- एक परिमेय संख्या तथा एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल सदैव एक अपरिमेय संख्या होती है।
- दो परिमेय संख्याओं का अनुपात सदैव एक परिमेय संख्या जबकि हर भाग अशून्य हो।
  अर्थात् r तथा s दो परिमेय संख्यायें हो तो
  $r+s, r-s, r\times s, \frac{r}{s}(s\neq 0)$ सदैव परिमेय संख्या होगी।
- एक परिमेय संख्या तथा एक अपरिमेय संख्या का अन्तर सदैव एक अपरिमेय संख्या होती है।
  अर्थात r परिमेय तथा s अपरिमेय संख्या हो तो
  $r+s, r-s, s\ \ -r, r\times s, \frac{r}{s}(s\neq 0), \frac{s}{r}(r\neq 0)$ सदैव अपरिमेय संख्या होगी।

20. संयुग्मी अपरिमेय संख्या (Conjugate Ir-rational Number):

- यदि a और b दो परिमेय संख्यायें है किन्तु पूर्णवर्ग नहीं है तो अपरिमेय संख्यायें $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ तथा $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ एक दूसरे की संयुग्मी अपरिमेय संख्या कहलाती हैं
- दो संयुग्मी अपरिमेय संख्याओं का गुणनफल सदैव एक परिमेय संख्या होता है।
  $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$ (परिमेय)
  $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2-b$ (परिमेय)

1. परिमेय संख्या धनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य हो सकती है। परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ धनात्मक होगी यदि p और q दोनों समान चिह्न युक्त (अर्थात् दोनों धनात्मक अथवा दोनों ऋणात्मक) हो तथा $\frac{p}{q}$ ऋणात्मक होती है यदि p और q परस्पर विपरीत चिह्न युक्त (एक धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक) हो-
2. प्रत्येक प्राकृत संख्या अथवा प्रत्येक पूर्ण संख्या अथवा प्रत्येक भिन्न संख्या परिमेय संख्या होती है किन्तु विलोम सदैव सत्य नहीं होता।
   अर्थात् प्रत्येक परिमेय संख्या का प्राकृत अथवा पूर्णांक होना आवश्यक नहीं होता है। यह दशमलव प्रसार (सांत अथवा असांत आवर्ती) के रूप में भी हो सकती है।
3. परिमेय संख्या के अंश तथा हर को समान संख्या से गुणा अथवा भाग करने पर परिमेय संख्या का मान अपरिवर्तित रहता है।
   जैसे: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}, \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

परिमेयकरण (Rationalization)

- परिमेयकरण वह प्रक्रिया है जिसमें किसी भिन्नात्मक रूप में लिखी हुई संख्या में अंश (Numerator) या हर (Denominator) में उपस्थित अपरिमेय संख्या को परिमेय संख्या में परिवर्तित किया जाता है। इस प्रक्रिया में हम संख्याओं के संयुग्म से गुणा करते हैं, ताकि अपरिमेय अंश या हर को परिमेय में बदल सकें।

परिमेयकरण के नियम :-

(i) $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

(ii) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$

उदाहरण:

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.414}{2} = 0.707$

(2) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1.732}{3} = 0.577$

(3) $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{2.449}{2} = 1.2285$

(iii) द्विपदी अपरिमेय संख्या का परिमेयकरण:

- द्विपदी अपरिमेय संख्या का सरलतम परिमेयकरण उसके संयुग्मी (Conjugate) के गुणनखण्ड द्वारा किया जाता है।

(a) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ का परिमेयकरण करने के लिये इसे $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ से गुणा करते हैं।

- $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

  उदाहरण: $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

- $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$
- $= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{6-5} = \sqrt{6}+\sqrt{5}$

ज्यामिति (Geometry)

अध्याय 02

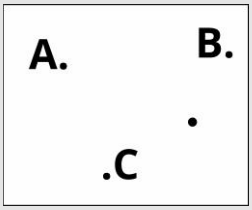
- "ज्यामिति" (Geometry) का उद्भव यूनानी भाषा जिओमीट्रोन (Geometron) से हुआ है।
- "जियो" (Geo) का अर्थ होता है 'भूमि' और "मीट्रोन" (Metron) का अर्थ होता है 'मापना'।
- प्राचीन काल में ज्यामिति का विकास भूमि मापन की आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए हुआ था। यह अवधारणा विशेष रूप से कृषि, भवन निर्माण, और खगोल विज्ञान में उपयोगी रही, जहाँ सटीक मापन और आकार की गणना की आवश्यकता होती थी।

बिन्दु ,रेखा और उनके प्रकार

बिन्दु (Point)-

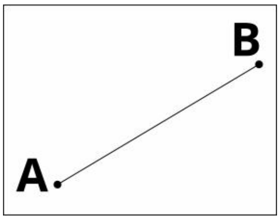
- बिंदु ज्यामिति का एक मौलिक तत्व है, जो एक चिन्ह या स्थान को दर्शाता है जिसका कोई आकार, लंबाई, चौड़ाई या गहराई नहीं होती है। इसकी पहचान केवल उसकी स्थिति से की जा सकती है।
- उदाहरण के लिए, जब हम पेंसिल के नुकीले सिरे से कोई चिन्ह लगाते हैं, तो वह एक बिंदु बन जाता है।

नोट: ज्यामिति में बिंदु को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों जैसे A, B, C, D आदि से दर्शाया जाता है।



रेखा खण्ड (Line Segment)-

- रेखा खण्ड दो स्थिर बिंदुओं के बीच की न्यूनतम दूरी को दर्शाता है, जो एक सीधी रेखा के हिस्से के रूप में देखा जा सकता है। यह दो बिंदुओं (अंत बिंदु) से सीमित होती है और इसकी एक निश्चित लंबाई होती है, जो उन दो बिंदुओं के बीच की दूरी के बराबर होती है।
- उदाहरण के लिए, कागज का किनारा या बॉक्स का किनारा एक रेखा खण्ड हो सकता है, जो दो बिंदुओं से सीमित होता है और इसकी एक निश्चित लंबाई होती है।
- रेखा खण्ड को ज्यामिति में अंत बिंदुओं के नामों द्वारा दर्शाया जाता है, जैसे कि यदि A और B दो बिंदु हैं, तो रेखा खण्ड को $\overline{AB}$ से व्यक्त किया जाता है।

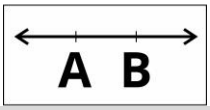


रेखा (Line)-

- रेखा एक ज्यामितीय आकृति है जो दोनों दिशाओं में अनंत तक विस्तृत होती है। यह रेखा खण्ड को बिंदु A से एक दिशा में और बिंदु B से दूसरी दिशा में बिना अंत के बढ़ाने से प्राप्त होती है।

रेखा की कुछ महत्वपूर्ण विशेषताएं हैं:

- रेखा का कोई निश्चित लंबाई नहीं होती है।
- यह दोनों दिशाओं में अनिश्चित रूप से विस्तृत रहती है।
- रेखा पर असंख्य बिंदु होते हैं।
- रेखा को अक्सर अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों जैसे l, m, n आदि से दर्शाया जाता है, या फिर उसके किसी भी दो बिंदुओं (जैसे AB) से व्यक्त किया जाता है।

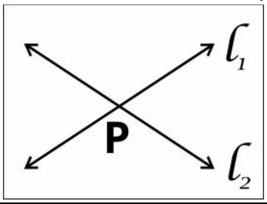


- **रेखा का निर्धारण के लिए दो बिन्दु पर्याप्त है।**

(1) प्रतिच्छेदी रेखाएँ (Intersecting Line)-

- दो रेखाओं में एक उभयनिष्ट बिन्दु हो तो इन्हें प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहते है।

जैसे- कागज के दो किनारे, परस्पर काटती सड़क



Note-

(i) दो रेखाएँ एक से अधिक बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित नहीं कर सकती।

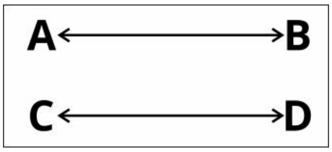
(ii) दो से अधिक रेखाएँ एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेदित कर सकती है।

(2) समान्तर रेखाएँ (Parallel Lines)-

- ऐसी रेखाएँ जो प्रतिच्छेद नहीं करती समान्तर रेखाएँ कहलाती है। समान्तर रेखाओं के मध्य दूरी सदैव एक समान होती है।

	रेखाखण्ड	**किरण**	**रेखा**
1.	दो स्थिर बिन्दु (शीर्ष) एक प्रारम्भिक बिन्दु दूसरा अन्तिम बिन्दु	एक स्थिर बिन्दु (शीर्ष) प्रारम्भिक बिन्दु तथा दूसरी ओर से अनन्त की ओर अग्रसर	दोनों सिरे अनन्त की ओर अग्रसर
2.	लम्बाई नियत (परिमित)	एक ओर से अपरिमित लम्बाई	दोनों ओर से अपरिमित लम्बाई
3.	दोनों स्थिर बिन्दुओं के मध्य अनन्त बिन्दु	स्थिर सिरे से आगे अनन्त बिन्दु	अनन्त बिन्दु दो स्थिर बिन्दुओं द्वारा रेखा का निर्धारण संभव

- यदि AB तथा CD समान्तर हो तो संकेत रूप $AB||CD$



- जैसे- रेल की पटरी, खिड़की की सलाखे, मेज के आमने-सामने के किनारे।

किरण (Ray)-

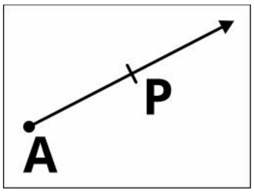
- किरण रेखा का एक भाग होता है, जो एक बिंदु से प्रारंभ होती है, जिसे प्रारंभिक बिंदु कहते हैं। यह एक दिशा में बिना किसी अंत के विस्तृत होती है।

कुछ महत्वपूर्ण विशेषताएं है-

- यह एक बिंदु से प्रारंभ होती है।
- यह एक दिशा में बिना किसी अंत के विस्तृत होती है।
- यह रेखा का एक भाग होता है।

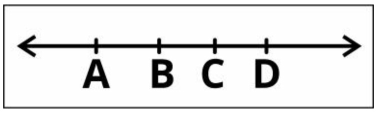
उदाहरण-

- टॉर्च से निकलने वाला प्रकाश किरण।
- सूर्य से आने वाली प्रकाश किरण।
- लेजर किरण।



संरेख बिन्दु (Colinear Point)-

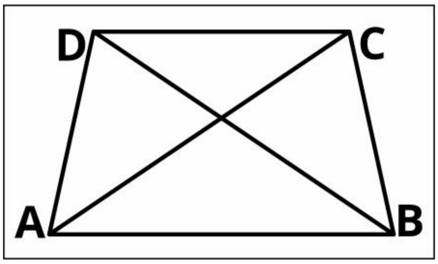
- एक ही सरल रेखा पर स्थित बिन्दु संरेख बिन्दु कहलाते है।



- यदि सभी बिन्दु एक ही रेखा पर स्थित न हो तो इन्हें अंसरेख बिन्दु कहते है।
- n असंरेख बिन्दुओं से गुजरने वाली सरल रेखाओं की संख्या $= \frac{n(n-1)}{2}$

जैसे-

- **$n = 4$ के लिए सरल रेखाओं की संख्या**



$\frac{4(4-1)}{2} = \frac{4\times 3}{2} = 6$

AB, AC, AD, BC, BD, CD

सगांमी बिन्दु/संगामी सरल रेखा -

- यदि तीन या तीन से अधिक सरल रेखा एक हो बिन्दु से गुजरती हो तो इन्हें संगामी सरल रेखाएँ कहते है तथा इस बिन्दु को संगामी बिन्दु कहते है।

उदाहरण:

1. एक तल पर कितनी रेखाएँ खीची जा सकती है।

(a) 3 (b) 2
(c) अनन्त (d) कुछ कह नहीं सकते **[c]**

2. जब दो रेखाएँ आगे बढ़ाने पर किसी बिन्दु पर काटती है तो इन रेखाओं को कहते है?

(a) संगामी रेखाएँ (b) समान्तर रेखाएँ
(c) प्रतिच्छेदी रेखाएँ (d) उपयुक्त सभी **[c]**

महत्वपूर्ण बिन्दु-

- पृष्ठ के किनारे सरल रेखाएँ होती है।
- सरल रेखा के सिरे बिन्दु होते है।
- सरल रेखा पर अनन्त बिन्दु होते है।
- एक बिन्दु से अनन्त रेखाएँ खीची जा सकती है।
- दो भिन्न बिन्दुओं से केवल एक रेखा खिची जा सकती है।
- दो भिन्न सरल रेखाओं में अधिकतम एक बिन्दु उभयनिष्ठ हो सकता है।
- रेखा खण्ड सरल रेखा का एक निश्चित भाग होता है, जिसका मापन अद्वितीय संख्या होती है जिसे रेखा खण्ड की लम्बाई कहते है।

कोण और कोणों के प्रकार -

कोण (Angle)-

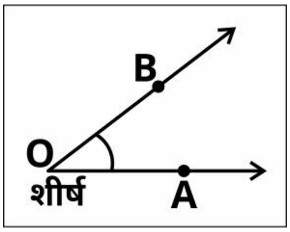
- कोण तब बनता है जब एक ही प्रारंभिक बिंदु से दो किरणें निकलती हैं। इन दोनों किरणों के बीच बनने वाला स्थान कोण कहलाता है।

कुछ महत्वपूर्ण घटक -

- कोण की भुजाएँ (Arms or Sides of Angle): कोण की निर्माण करने वाली दोनों किरणें।
- कोण का शीर्ष (Vertex): उन दोनों किरणों का सामान्य प्रारंभिक बिंदु।
- कोण का चिन्ह: कोण को अक्सर अंग्रेजी अक्षरों के माध्यम से दर्शाया जाता है, जैसे ∠AOB या ∠O।

उदाहरण -

- घड़ी की सुइयाँ जब किसी समय विशेष पर मिलती हैं, तो वे कोण बनाती हैं।
- किताब के दो पृष्ठ जब खोले जाते हैं, तब उनके बीच का स्थान भी कोण कहलाता है।



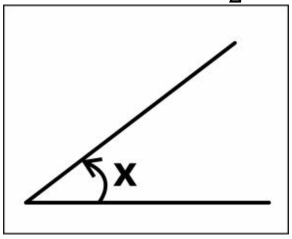
कोणों के प्रकार (Types of Angles)

माप के आधार पर-

(i) न्युन कोण (Acute Angle)-

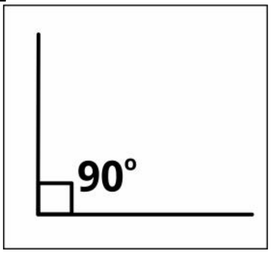
– 0° से 90° के मध्य कोण "न्युन कोण" कहलाते है।

$0^\circ < x < 90^\circ$ अथवा $0 < x < \frac{\pi}{2}$



(ii) समकोण (Right Angle)-

– 90° अथवा $\frac{\pi}{2}$ रेडीयन के कोण को "समकोण" कहते है।



(iii) अधिक कोण (Obtuse Angle)-

– 90° से अधिक किन्तु 180° से कम के कोण "अधिक कोण" कहलाता है।

$90^\circ < x < 180^\circ$ अथवा $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

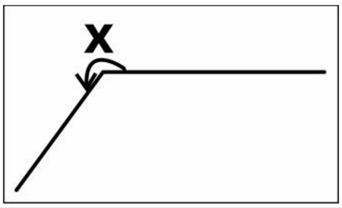
(iv) सरल कोण अथवा ऋजु कोण (Straight Angle)-

– 180° के कोण को "सरल कोण" कहते है

(v) वृहत्त कोण अथवा प्रतिवर्ति कोण (Reflex Angle)-

– 180° से अधिक किन्तु 360° से कम कोण "वृहत्त कोण" कहलाता है।

$180^\circ < x < 360^\circ$ अथवा $\pi < x < 2\pi$



पूरक कोण/अनुपूरक कोण/कोटी पूरक कोण (Complementry Angle) -

– जब दो कोणों का योग 90° हो तो वे परस्पर एक दूसरे के "पूरक कोण" कहलाते है।

– पूरक कोण सदैव न्युन कोण होते है।

कोण	पूरक कोण
0°	90°
90°	0°
10°	80°
5°	85°
θ	$90-\theta$

उदाहरण:

एक कोण, पूरक कोण का $\frac{7}{8}$ हो तो कोणो का अन्तर क्या होगा?

(a) 5° (b) 8°

(c) 6° (d) 12°

व्याख्या: -

माना कोण $= x$

$\Rightarrow$ पूरक कोण $= \frac{7}{8}x$

$x + \frac{7}{8}x = 90^\circ$

$\Rightarrow \frac{15x}{8} = 90^\circ$

$\Rightarrow x = \frac{90\times 8}{15} = 48^\circ$

कोण $= 48^\circ \Rightarrow$ पूरक कोण $= 90 - 48 = 42^\circ$

अन्तर $= 48^\circ - 42^\circ = 6^\circ$

सम्पूरक कोण (Supplementry Angle)-

– जब दो कोणों का योग 180° हो तो वे परस्पर एक दूसरे के "सम्पूरक कोण" कहलाते है।

(i) सम्पूरक युग्म में एक न्युन कोण तो दूसरा कोण अधिक कोण होता है।

(ii) समकोण का सम्पूरक समकोण होता है।

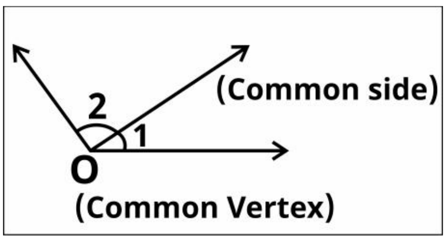
कोण	सम्पूरक कोण
10°	170°
50°	130°
0°	180°
180°	0°
θ	$180-\theta$

आसन्न कोण (Adjacent Angle)-

– जब दो कोण निम्नलिखित तीन शर्तों को पूरा करते हैं, तो वे **आसन्न कोण** कहलाते हैं:

1. **उभयनिष्ठ शीर्ष (Common Vertex)**: दोनों कोणों का शीर्ष बिंदु एक ही होना चाहिए।
2. **उभयनिष्ठ भुजा (Common Side)**: दोनों कोणों की एक भुजा समान होनी चाहिए।
3. **विपरीत दिशा में स्थित शेष भुजाएँ (Non-Common Sides)**: दोनों कोणों की अन्य भुजाएँ (जो उभयनिष्ठ भुजा नहीं हैं) उस भुजा के विपरीत दिशा में होनी चाहिए।

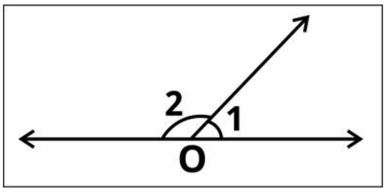
उदाहरण: यदि ∠1और ∠2 एक ही शीर्ष बिंदु पर हों, और उनकी एक भुजा समान हो, जबकि उनकी बाकी भुजाएँ विपरीत दिशाओं में हों, तो ∠1 और ∠2 को आसन्न कोण कहा जाएगा।



– इस प्रकार के कोणों को ज्यामिति में तब देखा जाता है जब कोण एक सीधी रेखा के साथ जुड़े होते हैं, और वे मिलकर किसी विशेष आकार का हिस्सा बनाते हैं।

रैखिक युग्म (Linear Pair)-

– आसन्न कोणों का युग्म जिनका योग 180° होता है, "रैखिक युग्म" कहलाता है।
– रैखिक युग्म में वह भुजा जो उभयनिष्ठ नहीं है परस्पर विपरित ओर स्थित होती है।



– रैखिक युग्म के कोण 'सम्पूरक कोण' होते है।

शीर्षभिमुख कोण (Vertically opposite angle)-

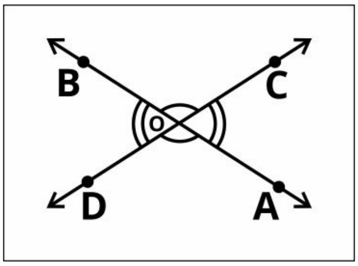
– जब दो रेखाएँ एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं, तो उस बिंदु पर बनने वाले परस्पर विपरीत कोण शीर्षभिमुख कोण कहलाते हैं।
– दो रेखाओं के प्रतिच्छेदन से एक ही बिंदु पर चार कोण बनते हैं।
– विपरीत दिशा में बनने वाले कोण शीर्षभिमुख कोण कहलाते हैं, और ये कोण हमेशा बराबर होते हैं।

उदाहरण: यदि रेखाएँ AB और CD एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं, तो चार कोण बनेंगे:

∠AOD=∠BOC (ये एक युग्म हैं)

∠AOC=∠BOD (ये दूसरा युग्म हैं)

विशेषता: शीर्षभिमुख कोणों का माप हमेशा समान होता है, यानी ∠AOD=∠BOC ,∠AOC=∠BOD

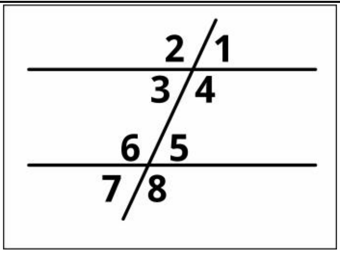


एकान्तर कोण (Alternative Angle)-

– एकान्तर कोण तब बनते हैं जब दो समान्तर रेखाओं को कोई तिर्यक रेखा काटती है।

एकान्तर कोण की विशेषताएं -

– दो समान्तर रेखाएँ होती हैं जो एक दूसरे को नहीं काटती हैं।
– एक तिर्यक रेखा दोनों समान्तर रेखाओं को अलग-अलग बिंदुओं पर काटती है।
– विपरीत ओर बनने वाले अन्तः कोण एकान्तर कोण कहलाते हैं।
– एकान्तर कोण आपस में समान कोण होते हैं।



अन्तः एकान्तर कोणो के युग्म- $\angle 3 = \angle 5$ तथा $\angle 4 = \angle 6$

बाह्य एकान्तर कोणों के युग्म- $\angle 1 = \angle 7$ तथा $\angle 2 = \angle 8$

संगत कोण (Corresponding Angle)-

– जब दो समान्तर रेखाओं को कोई तिर्यक रेखा काटती है तो एक ही स्थिति तथा एक ही ओर बनने वाले कोण संगत कोण कहलाते है,

संगत कोण युग्म

$\angle 1 = \angle 5, \angle 2 = \angle 6$

$\angle 3 = \angle 7, \angle 4 = \angle 8$

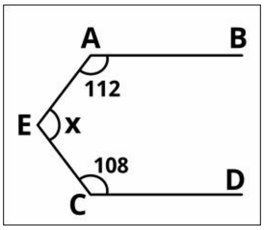
Note-

– तीर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोण सम्पूरक होते है।

$\angle 4 + \angle 5 = 180°$ तथा $\angle 3 + \angle 6 = 180°$

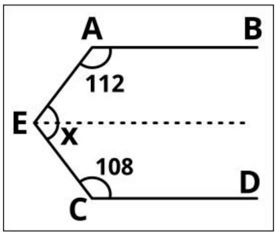
उदाहरण:

1. AB||CD हो तो $x = ?$



(a) 220° (b) 140°
(c) 150° (d) None

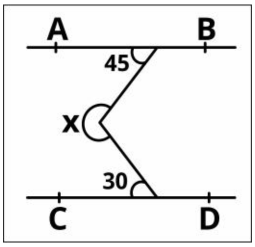
व्याख्या: -



x = (180 – 112) + (180 – 108)

= 360 – 220 = 140

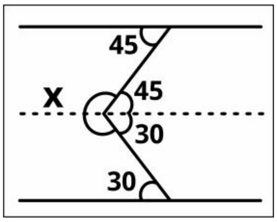
2. AB ||CD हो तो X = ?



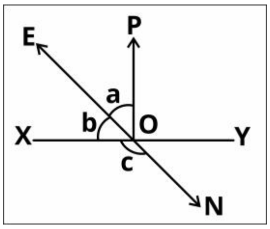
(a) 290° (b) 300°
(c) 280° (d) 285°

व्याख्या: -

360° – (45° + 30°) = 285°



3. $\angle POY = 90^\circ$ तथा $a : b = 2 : 3$ हो तो c = ?



(a) 113° (b) 54°

(c) 126° (d) 48°

व्याख्या: -

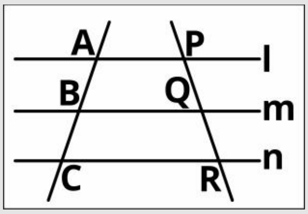
$a = \frac{2}{5} \times 90^\circ = 36^\circ, b = \frac{3}{5} \times 90^\circ = 54^\circ$

$b + c = 180 \Rightarrow c = 180 - 54 = 126^\circ$

Note-

– जब तीन या अधिक समान्तर रेखाओं को दो तीर्यकछेदी रेखा प्रतिच्छेद करती हो तो तीर्यकछेदी रेखा पर अन्तःखण्ड समानुपातीक होते है।

$\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$



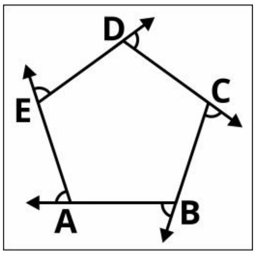
बहुभुज (Polygon)

- जब तीन या तीन से अधिक रेखा खंड आपस में मिलकर एक बंद आकृति बनाते हैं, तो उसे बहुभुज कहा जाता है।
- बहुभुजों की विभिन्न श्रेणियाँ होती हैं, जैसे:
- त्रिभुज - 3 भुजाओं वाला बहुभुज
- चतुर्भुज - 4 भुजाओं वाला बहुभुज
- पंचभुज - 5 भुजाओं वाला बहुभुज

बहिष्कोण (Exterior Angle):

- जब किसी बहुभुज की किसी भुजा को चक्रिय क्रम में (clockwise या anticlockwise) आगे की ओर बढ़ाया जाता है, तो बढ़ाई गई भुजा और उसकी क्रमागत भुजा के बीच बनने वाला कोण बहिष्कोण (Exterior Angle) कहलाता है।
- बहिष्कोण बहुभुज के बाहर बनता है और इसे बहुभुज के अंदर के कोण के पूरक के रूप में देखा जा सकता है।

विशेषता: किसी भी बहुभुज के सभी बहिष्कोणों का योग हमेशा 360°होता है, चाहे बहुभुज कितनी भी भुजाओं का हो।



- बहुभुज के अन्तः कोण का योग $= (2n - 4) \times 90^\circ$ $= (2n - 4)$ समकोण
- बहुभुज के बहीष्कोणों का योग $= 360^\circ$ या 4 समकोण
- बहुभुज के किसी शीर्ष पर बने अन्तः कोण तथा बहीष्कोण का कुल योग 180 (सम्पूरक कोण) होता है।

  अन्तः कोण + बहीष्कोण $= 180^\circ$

बहुभुजक विकर्ण (Digonal of a polygon)-

- बहुभुज के किन्ही दो शीर्षों (आसन्न शीर्षों को छोड़कर) को मिलाने वाला रेखाखण्ड बहुभुज का विकर्ण कहलाता है।

Note-

- त्रिभुज में विकर्ण नहीं पाया जाता है। अर्थात् त्रिभुज के विकर्णों की संख्या शुन्य होती है।
- n भुजा वाले बहुभुज में विकर्णों की संख्या $= \frac{n(n-3)}{2}$

सम बहुभुज (Regular polygon)-

- यदि बहुभुज में सभी भुजाएँ समान लम्बाई की हो तो इसे सम बहुभुज कहते है।
- समबहुभुज में प्रत्येक अन्तःकोण समान माप का होता है इसी प्रकार प्रत्येक बहिष्कोण समान माप का होता है।
- सम बहुभुज का प्रत्येक अन्तः कोण $= \frac{(2n-4)\times 90^\circ}{n}$
- सम बहुभुज का प्रत्येक बहीष्कोण $= \frac{360^\circ}{n}$

भुजाओं की संख्या	आकृति	प्रत्येक अन्तःकोण	प्रत्येक बहीष्कोण	विकर्णों की संख्या
$n = 3$	त्रिभुज	60°	120°	0
$n = 4$	चतुर्भुज	90°	90°	2
$n = 5$	पंचभुज	108°	72°	5
$n = 6$	षष्ट भुज	120°	60°	9
$n = 8$	अष्ठ भुज	135°	45°	20
$n = 9$	नव भुज	140°	40°	27
$n = 10$	दस भुज	144°	36°	35

त्रिभुज और त्रिभुज के प्रकार

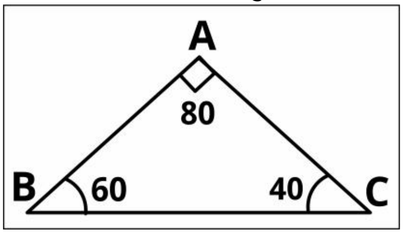
- तीन भुजाओं से घिरी बन्द आकृति त्रिभुज कहलाती है। त्रिभुज में 3 शीर्ष बिन्दु, 3 भुजा तथा 3 कोण होते है, त्रिभुज में विकर्ण नहीं पाया जाता है।

महत्वपूर्ण बिन्दु-

(i) किसी भी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग सदैव तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

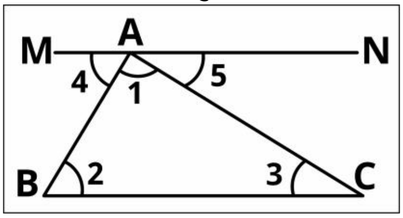
(ii) किसी भी त्रिभुज में दो भुजाओं का अन्तर सदैव तीसरी भुजा से कम होता है।
$|a-b|<c, |b-c|<a, |c-a|<b$

(iii) त्रिभुज में सबसे बड़े कोण के सामने वाली भुजा सबसे बड़ी तथा सबसे छोटे कोण के सामने वाली भुजा सबसे छोटी होती है।



BC सबंसे बड़ी भुजा, AB सबसे छोटी भुजा

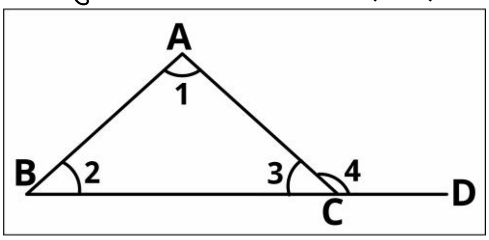
(iv) त्रिभुज के तीनों कोणों का कुल योग सदैव 180° होता है।



Proof-

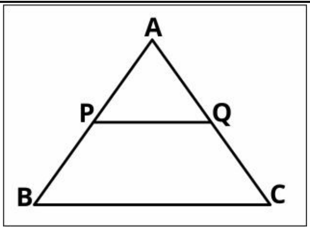
- त्रिभुज ABC के शीर्ष A ने भुजा BC के समान्तर रेखा खीचने पर $\angle 4 = \angle 2$ (एकान्तर कोण) $\angle 5 = \angle 3$ (एकान्तर कोण)
$\because$ MAN सरल रेखा है अत:
$\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180°$ (सरल रेखीय कोण)
$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180°$

(v) त्रिभुज की किसी भुजा को बढ़ाने पर बना बहीष्कोण अन्तराभिमुख कोणो के योग के बराबर होता हैं।



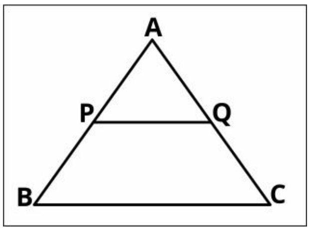
(vi) त्रिभुज की किसी भुजा के समान्तर खीची गई रेखा शेष दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है। **(थेल्स प्रमेय)**
अथवा

- कोई सरल रेखा, त्रिभुज की दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करें तो यह सरल रेखा, त्रिभुज की तीसरी भुजा के समान्तर होती है।



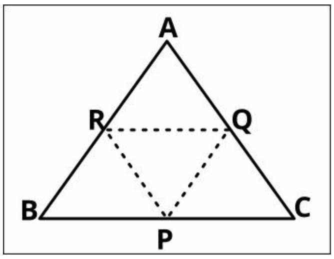
यदि △ ABC में PQ||BC हो तो $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

(vii) किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल रेखा तीसरी भुजा के समान्तर तथा इसकी आधी होती है।



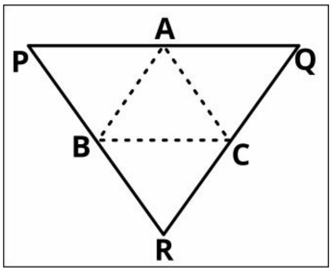
यदि $\triangle ABC$ में भुजा AB तथा AC के मध्य बिन्दु P तथा Q हो तो $PQ \| BC$ तथा $PQ = \frac{1}{2} BC$
अथवा
एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से दूसरी भुजा के समान्तर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

(viii) त्रिभुज की तीनों भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल मुल क्षेत्रफल का एक चौथाई तथा परिमाप मुल त्रिभुज के परिमाप का आधा होता है।



△ PQR का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}$ △ ABC का क्षेत्रफल
△ PQR का परिमाप $= \frac{1}{2}$ △ ABC का परिमाप

(ix) किसी त्रिभुज के शीर्षों से अलग-अलग खीची गई रेखाएँ जो कि सम्मुख भुजाओं के समान्तर हो तो इनसे बने त्रिभुज का परिमाप, मुल त्रिभुज के परिमाप का दुगुना तथा क्षेत्रफल मुल त्रिभुज के क्षेत्रफल का चार गुना होता है।
PQ||BC, QR||AC, PR||AC हो तो–

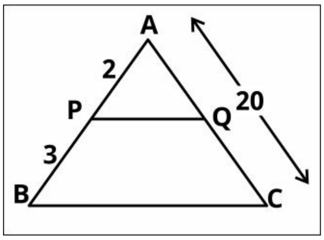


△ PQR का परिमाप $= 2 \times$△ ABC का परिमाप
△ PQR का क्षेत्रफल $= 4 \times$△ ABC का क्षेत्रफल

उदाहरण:

1. त्रिभुज ABC में आधार BC के समान्तर भुजा PQ इस प्रकार है ताकि $AP : PB = 2 : 3$ यदि $AC = 20$ cm हो तो QC का माप ज्ञात करो?

व्याख्या: -



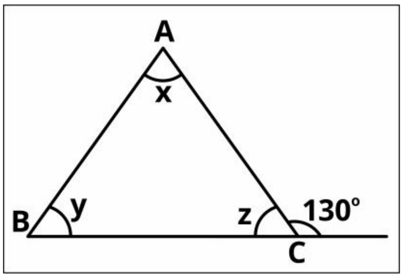
$\because PQ \| BC$ अत:

$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{2}{3}$

$QC = \frac{3}{5} \times AC = \frac{3}{5} \times 20 = 12$ cm

2. किसी त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाने पर बनने वाला बहीष्कोण 130° है। यदि अन्तराभिमुख कोणो का अन्तर 30° हो तो त्रिभुज के कोण ज्ञात करो।

व्याख्या: -



$x + y = 130$

$x - y = 30$

$x = 80^\circ, y = 50^\circ$

$z = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

त्रिभुज के कोण $80^\circ, 50^\circ, 50$

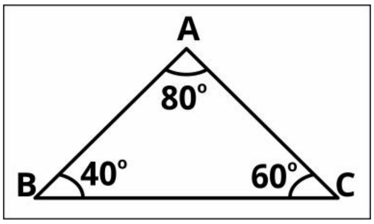
त्रिभुज के प्रकार (Types of Triangles)

(A) भुजाओं के आधार पर (On the Basis of Sides)

(i) विषमबाहु त्रिभुज (Scalene Triangle)-

- यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाई अलग-अलग होती है, तो उसे **विषमबाहु त्रिभुज** कहा जाता है।
- इस त्रिभुज की विशेषता यह है कि इसमें न तो कोई दो भुजाएँ समान होती हैं और न ही कोई दो कोण समान होते हैं।
- **भुजाओं की असमानता**: यदि त्रिभुज की भुजाएँ AB, BC, और CA हैं, तो $AB \neq BC \neq CA$ होगा।
- **कोणों की असमानता**: विषमबाहु त्रिभुज में तीनों कोणों की माप भी भिन्न होती है। सबसे बड़ी भुजा के सामने वाला कोण सबसे बड़ा होता है, और सबसे छोटी भुजा के सामने वाला कोण सबसे छोटा होता है।

उदाहरण: यदि त्रिभुज में भुजा BC सबसे लंबी है, तो कोण ∠A (जो BC के सामने है) सबसे बड़ा होगा, और यदि भुजा AC सबसे छोटी है, तो कोण ∠B (जो AC के सामने है) सबसे छोटा होगा।

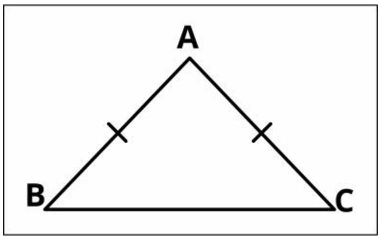


विशेषता: विषमबाहु त्रिभुज में न कोण और न ही भुजाएँ किसी भी प्रकार से समान होती हैं, जो इसे अन्य त्रिभुजों से अलग बनाता है।

(ii) समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle)-

- यदि त्रिभुज में दो भुजा समान हो तो इसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते है।

$AB = AC \neq BC$



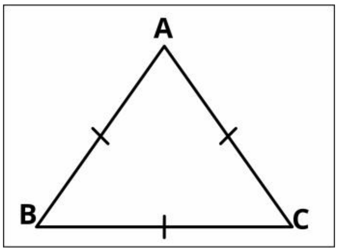
- समान भुजा के सम्मुख कोण भी समान होते है।

अथवा

समान कोण के सम्मुख भुजा समान होती है।

(iii) समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle)-

- यदि त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई समान हो तो इसे समबाहुत्रिभुज कहते है। $AB = BC = CA$



- समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है।

$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

(B) कोणों के आधार पर (On Basis of Angles)-

(i) समकोण त्रिभुज (Right Angled Triangle)-

- यदि त्रिभुज में एक कोण 90° का हो तो इसे समकोण त्रिभुज कहते है। समकोण त्रिभुज में शेष दो कोणों का योग 90° होता है।
- समकोण त्रिभुज में दो छोटी भुजाओं के वर्गों का योग तीसरी सबसे बड़ी भुजा के वर्ग के बराबर होता है।

क्षेत्रमिति (Mensuration)

अध्याय 03

(i) द्विविमिय आकृतियों की क्षेत्रमिति (Mensuration of 2-D)

- गणित की वह शाखा जिसके अन्तर्गत द्विविमिय तथा त्रिविमिय आकृतियों के आयतन, क्षेत्रफल तथा परिमिती का अध्ययन किया जाता है क्षेत्रमिति (Mensuration) कहलाती है।
- **द्विविमिय अथवा समतलीय आकृतियाँ-** त्रिभुज, चतुर्भुज, बहुभुज, वृत्त आदि
- **त्रिविमिय अथवा ठोस आकृतियाँ-** घन, घनाभ, बेलन, शंकु, गोला, छिन्नक आदि

द्विविमिय अथवा समतलीय आकृतियाँ (Two Dimensional or Plane figure)

परिमाप (Perimeter)- किसी बंद आकृति की कुल लम्बाई को परिमाप कहते हैं। यह आकृति के चारों ओर की दूरी होती है, जिसे हम उस आकृति के भुजाओं की लंबाई को जोड़कर प्राप्त करते हैं।

- इसकी इकाई लम्बाई की इकाई के रूप होती है, जैसे- मीटर, सेन्टीमीटर आदि।

क्षेत्रफल (Area)- किसी बंद आकृति द्वारा समतल में घेरा गया क्षेत्र उस आकृति का क्षेत्रफल कहलाता है। यह आकृति के अंदर के क्षेत्रफल को दर्शाता है।

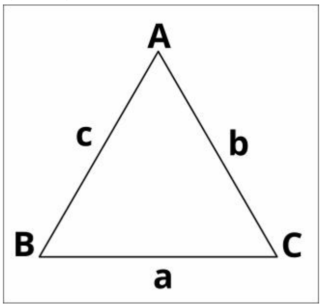
- इसकी इकाई वर्ग इकाई के रूप में होती है। जैसे- वर्गमीटर, वर्गसेन्टीमीटर आदि।

त्रिभुज (Triangle)

- त्रिभुज एक बंद आकृति है जो तीन भुजाओं से घिरी होती है। इसमें तीन शीर्ष (Vertices) और तीन कोण (Angles) होते हैं।

(i) विषमबाहु त्रिभुज -

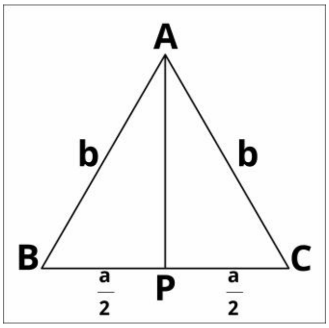
- विषमबाहु त्रिभुज वह त्रिभुज होता है जिसकी तीनों भुजाएं अलग-अलग लंबाई की होती हैं। इसमें कोई दो भुजाएं समान लंबाई की नहीं होती हैं।



- त्रिभुज का परिमाप= त्रिभुज की भुजाओं का योग
  $2s = a + b + c$
- अर्द्ध परिमाप (Sub-Perimeter) $s = \frac{a+b+c}{2}$
- **त्रिभुज का क्षेत्रफल** $\Delta = \frac{1}{2} \times$ **आधार** $\times$ **ऊँचाई**
  अथवा
- $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ जहाँ s अर्द्ध परिमाप
  अथवा
  $= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$
- किसी त्रिभुज के माध्यिकाओं से मिलकर बने त्रिभुज का क्षेत्रफल वास्तविक त्रिभुज के क्षेत्रफल का तीन चौथाई होता है।
- अतः यदि $\triangle ABC$ की माध्यिकाओं की लम्बाई x, y, z हो तो $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{4}{3}$ माध्यिकाओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल $\Delta = \frac{4}{3}\sqrt{S_m(S_m - x)(S_m - y)(S_m - z)}$
  जहाँ $S_m = \frac{\text{माध्यिकाओं का योग}}{2} = \frac{x+y+z}{2}$

(ii) समद्विबाहु त्रिभुज -

- समद्विबाहु त्रिभुज वह त्रिभुज होता है जिसमें दो भुजाएं समान लंबाई की होती हैं। इसमें दो भुजाएं एक समान होती हैं और तीसरी भुजा अलग होती है।

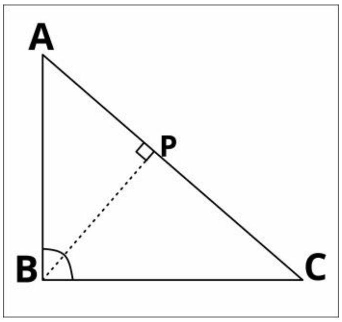


- समद्विबाहु त्रिभुज की एक विशेषता यह है कि समान भुजाओं द्वारा तीसरी भुजा से बनाया गया कोण समान होता है। इसका यह मतलब है कि समद्विबाहु त्रिभुज में दो कोण समान होते हैं।
  $\angle B = \angle C$
  (ऊंचाई) $AP = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$ $\left(\because AP = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2}\right)$
  समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल
  $= \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2} = (s-b)\sqrt{s(s-a)}$
  यहां $s =$ अर्द्ध परिमाप, $b =$ समान भुजाऐं, $a =$ आधार

(iii) समकोण त्रिभुज -

- समकोण त्रिभुज वह त्रिभुज होता है जिसमें एक कोण 90 डिग्री का होता है। इस त्रिभुज में एक लंबा कोण (90 डिग्री) और दो छोटे कोण होते हैं।
- समकोण त्रिभुज की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि सबसे बड़ी भुजा हमेशा कर्ण (Hypotenuse) होती है। कर्ण वह भुजा होती है जो 90 डिग्री के कोण के विपरीत होती है।

- समकोण त्रिभुज में पाइथागोरस प्रमेय (Pythagoras Theorem) लागू होता है, जो कहता है:
  $(\text{कर्ण})^2 = (\text{आधार})^2 + (\text{लम्ब})^2$

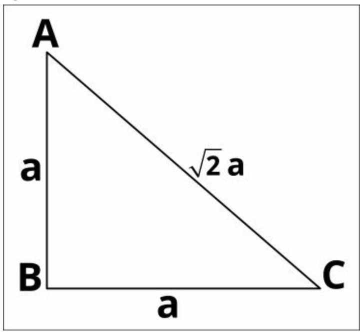


- **समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊंचाई**

(iv) समद्विबाहु समकोण त्रिभुज -

- समद्विबाहु समकोण त्रिभुज वह त्रिभुज होता है जो दो शर्तों को पूरा करता है:

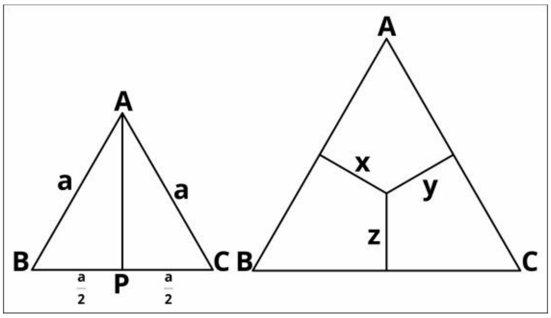
1. यह एक समकोण त्रिभुज है, अर्थात इसमें एक 90 डिग्री का कोण होता है।
2. इसमें दो भुजाएं समान लंबाई की होती हैं।



- **समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} a^2$**
- **त्रिभुज का परिमाप $AB + BC + AC = \sqrt{2}a(\sqrt{2} + 1)$**

(v) समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle)-

- समबाहु त्रिभुज वह त्रिभुज होता है जिसकी तीनों भुजाएं समान लंबाई की होती हैं। यह त्रिभुज एक विशेष प्रकार का त्रिभुज है जो ज्यामिति में महत्वपूर्ण है।
- समबाहु त्रिभुज की एक विशेषता यह है कि इसका प्रत्येक कोण 60 डिग्री का होता है। यह मतलब है कि समबाहु त्रिभुज में तीन समान कोण होते हैं।
- समबाहु त्रिभुज की अन्य विशेषताएं भी हैं, जैसे कि इसकी तीनों भुजाएं समान होती हैं



- **परिमिति $= 3 \times$ भुजा**
- (ऊंचाई) $AP = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$
- **समबाहु त्रिभुज की ऊंचाई $= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$**
  तो भुजा $(a) = \frac{2}{\sqrt{3}} \times$ ऊंचाई
  तो $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
- **समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल$\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{भुजा})^2$**
  $= \frac{(\text{अन्तर्लम्बों के योग})^2}{\sqrt{3}}$
  $= \frac{(\text{ऊंचाई})^2}{\sqrt{3}}$

उदाहरण:-

1. एक समबाहु त्रिभुज के किसी शीर्ष से सामने की भुजा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई 8 मी. है तो समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल बताओ।

व्याख्या:-

- समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{(\text{ऊँचाई})^2}{\sqrt{3}}$
  $= \frac{(8)^2}{\sqrt{3}}$ या $\frac{64}{\sqrt{3}}$
  $= \frac{64}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{64 \times 1.732}{3}$
  $= 36.94$ वर्ग मीटर

दूसरी विधि-

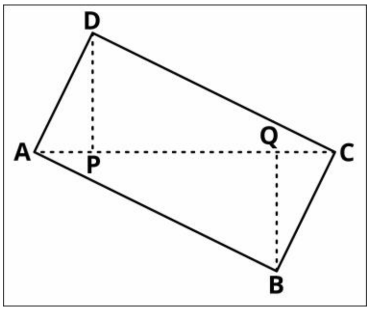
- समबाहु त्रिभुज की भुजा $= \frac{2}{\sqrt{3}} \times$ ऊँचाई
  $= \frac{2 \times 8}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}}$ मी.
  समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2$
  $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{16}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{256}{3} = \frac{64\sqrt{3}}{3}$
  $= 36.94$मी.

- **समकोण त्रिभुज की भुजाओं तथा आयत की भुजाओं व विकर्ण के मध्य सम्बन्ध-**

एक भुजा	दूसरी भुजा	कर्ण/विकर्ण
3	4	5
6	8	10
5	12	13
8	15	17
9	12	15
7	24	25
9	40	41

चतुर्भुज (Quadrilateral)

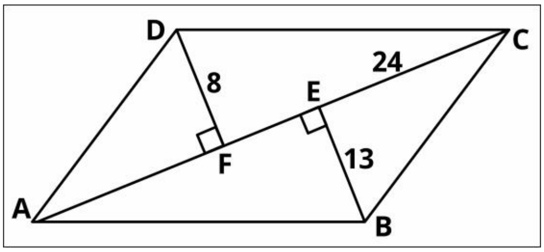
- चतुर्भुज एक बंद आकृति है जो चार भुजाओं से घिरी होती है। यह एक दो-आयामी आकृति है जिसमें चार शीर्ष (Vertices) और चार कोण (Angles) होते हैं।
- चतुर्भुज की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि इसका विकर्ण (Diagonal) चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में विभाजित करता है। यह विभाजन चतुर्भुज के क्षेत्रफल की गणना करने में मदद करता है।
- चतुर्भुज का क्षेत्रफल दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है।
- यह सूत्र इस प्रकार है:
  चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = △ADC + △ABC
- $\frac{1}{2} \times AC \times PD + \frac{1}{2} \times AC \times QB = \frac{1}{2} \times AC(PD + QB)$
  $= \frac{1}{2} \times$ विकर्ण $\times$ विकर्ण पर डाले गये लम्बों का योग



उदाहरण:-

1. चतुर्भुज आकार के क्षेत्र का विकर्ण 24 मीटर है और शेष सम्मुख शीर्षों से बनाए गए लम्ब 8 मीटर और 13 मीटर है। क्षेत्र का क्षेत्रफल कितना है?

व्याख्या:-



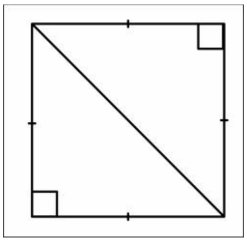
- चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्ण $\times$ विकर्ण पर डाले गये लम्बों का योग
  $= \frac{1}{2} \times 24 \times (8 + 13)$
  $= \frac{1}{2} \times 24 \times 21 = 252$ वर्ग मीटर

विशेष स्थितियाँ-

वर्ग (Square)-

- वर्ग एक विशेष प्रकार का चतुर्भुज है जिसकी निम्नलिखित विशेषताएं हैं:

1. चारों भुजाएं समान लंबाई की होती हैं।
2. प्रत्येक कोण समकोण (90 डिग्री) होता है।
3. वर्ग एक नियमित चतुर्भुज है, जिसका अर्थ है कि इसकी सभी भुजाएं और कोण समान होते हैं।

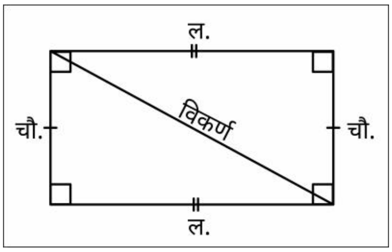


- **वर्ग का क्षेत्रफल** $=$ (**भुजा**)$^2 = \frac{(\text{विकर्ण})^2}{2}$
- विकर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल पहले का दुगुना होता है।
- **वर्ग का परिमाप** $= 4 \times$ **भुजा**
  वर्ग की लम्बाई व चौड़ाई समान होती है।
  तो वर्ग का विकर्ण $= \sqrt{2} \times$ भुजा
  अर्थात वर्ग का विकर्ण उसकी भुजा का $\sqrt{2}$ गुना होता है।
- वर्ग की भुजा में $x\%$ वृद्धि करने पर क्षेत्रफल में
  वृद्धि $= \left(2x + \frac{x^2}{100}\right)\%$

आयत (Rectangle)-

- आयत एक विशेष प्रकार का चतुर्भुज है जिसकी निम्नलिखित विशेषताएं हैं:

1. आमने-सामने की भुजाएं समान लंबाई की होती हैं।
2. प्रत्येक कोण समकोण (90 डिग्री) होता है।
3. आयत की विशेषता यह है कि इसकी लंबाई और चौड़ाई अलग-अलग हो सकती हैं, लेकिन आमने-सामने की भुजाएं हमेशा समान होती हैं।

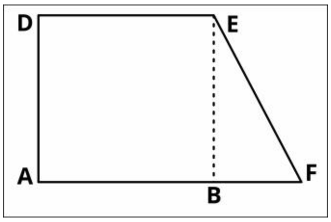


- **आयत का क्षेत्रफल** $=$ **लम्बाई** $\times$ **चौड़ाई**
  आयत का परिमाप $= 2$ **(लम्बाई + चौड़ाई)**
  आयत का विकर्ण $= \sqrt{(\text{लम्बाई})^2 + (\text{चौड़ाई})^2}$
  आयत की लम्बाई $= \frac{\text{परिमाप}}{2} -$ **चौड़ाई** $= \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}}$
- आयत की लम्बाई तथा चौड़ाई में क्रमशः $x\%$ तथा $y\%$ की वृद्धि करने पर क्षेत्रफल में होने वाली
  प्रतिशत वृद्धि $= \left(x + y + \frac{xy}{100}\right)\%$

Note:- आयत के विकर्ण बराबर होते हैं और एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium)-

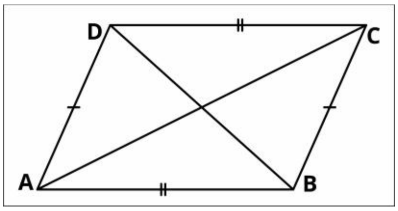
– एक ऐसा चतुर्भुज जिसकी भुजाओं का एक युग्म समान्तर हो उसे समलम्ब चतुर्भुज कहते है।



– **समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल** =
$\frac{1}{2}$ × **समान्तर भुजाओं का योग** × **उनके बीच की दूरी**

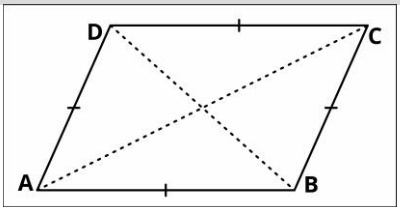
समानान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)-

– ऐसा चतुर्भुज जिसमें आमने-सामने की भुजाऐं समान होने के साथ-साथ समान्तर भी हों।



– समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊंचाई
– समानान्तर चतुर्भुज का प्रत्येक विकर्ण उसे दो समान भागों में विभाजित करता है।

समचतुर्भुज (Rhombus)-



– ऐसा चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाऐं तथा सम्मुख कोण समान हो।
– समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्णों का गुणनफल
– समचतुर्भुज की भुजा = $\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$
– जहाँ d_1 तथा d_2 विकर्णों की लम्बाई
– समचतुर्भुज की भुजा = $\frac{\text{परिमाप}}{4}$

Note: - वर्ग व समचतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते है।

Note: -समबाहु त्रिभुज या वर्ग अर्थात् जिसकी भुजाऐं समान हों तो उसकी भुजा में जितनी % कमी/वृद्धि होगी उतनी ही % कमी/वृद्धि उसके परिमाप में होगी।

उदाहरण:-

1. एक वर्ग की भुजा में 10% की वृद्धि कर दी जाती है तो बताओ इसके नये क्षेत्रफल व पुराने क्षेत्रफल में क्या अनुपात होगा?

व्याख्या:-

क्षेत्रफल पर प्रभाव = $\frac{(100\pm A)(100\pm B)}{100}$

$= \frac{110\times110}{100} = 121$

नया क्षेत्रफल : पुराना क्षेत्रफल

121: 100

2. एक वर्गाकार मैदान की तिरछी माप अर्थात् एक किनारे से दूसरे किनारे की दूरी $20\sqrt{2}$ मीटर है तो बताओ वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल क्या होगा?

व्याख्या:-

वर्ग की भुजा = $\frac{\text{विकर्ण}}{\sqrt{2}}$

भुजा $= \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 20$ मी.

वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2$

$= (20)^2 = 400$ वर्ग मी.

दूसरी विधि-

वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल = $\frac{(\text{विकर्ण})^2}{2}$

$= \frac{(20\sqrt{2})^2}{2} = \frac{400\times2}{2}$

$= 400$ वर्ग मी.

3. एक आयत की लम्बाई 4 मीटर है तथा चौड़ाई 3 मीटर है तो बताओ इसके विकर्ण की माप क्या होगी?

व्याख्या:-

$\text{विकर्ण}^2 = \text{लम्बाई}^2 + \text{चौड़ाई}$

$= (4)^2 + (3)^2$

$= 16 + 9$

$\text{विकर्ण}^2 = 25$

$\text{विकर्ण} = \sqrt{25} = 5$ मी.

4. किसी आयत की लम्बाई में 20% की वृद्धि कर दी जाती है तथा ऊँचाई में 30% की कमी कर दी जाती है तो बताओ उसके क्षेत्रफल पर क्या प्रभाव पड़ेगा ?

व्याख्या:-

जब किसी के क्षेत्रफल पर प्रभाव निकालना हो तो-

$= \frac{(100\pm A)(100\pm B)}{100}$ (+) वृद्धि,(−) कमी

$= \frac{120\times70}{100} = 84$

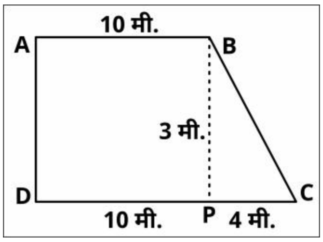
अर्थात् कमी $= 100 - 84 = 16\%$

पहला क्षेत्रफल हमेशा 100 मानते हैं।

5. एक समलम्ब चतुभुज में दो समान्तर भुजाएँ क्रमशः 10 मीटर व 14 मीटर है तथा समान्तर भुजाओं के मध्य की दूरी 3 मीटर है तो उसका क्षेत्रफल व परिमाप बताओ।

व्याख्या:-

- समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल =
  $\frac{1}{2} \times$ समान्तर भुजाओं का योग × बीच की दूरी
  $= \frac{1}{2} \times (10 + 14) \times 3$
  $= \frac{1}{2} \times 24 \times 3 = 36$ वर्ग मी.
  परिमाप-



$(BC)^2 = (PC)^2 + (BP)^2$
$= (4)^2 + (3)^2$
$= 16 + 9 = 25$
BC = 5 मी.
तो परिमाप $= 3 + 14 + 5 + 10 = 32$ मी.

बहुभुज (Polygon)

- तीन या तीन से अधिक सरल रेखाओं से घिरी बंद आकृति बहुभुज कहलाती है।
- यदि बहुभुज की सभी भुजाएँ लम्बाई " a " में समान हो तो इसे सम बहुभुज कहते है।
- सम बहुभुज के सभी आन्तरिक कोण समान होते है

n भुजा वाले सम बहुभुज के लिए-

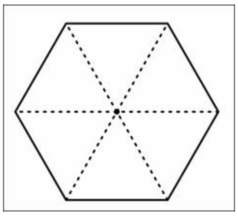
- आन्तरिक कोणों का योग $= (n - 2) \times 180°$
- प्रत्येक आन्तरिक कोण $= \frac{(n-2)\times 180°}{n}$
- बाह्य कोणों का योग $= 360°$
- प्रत्येक बहीष्कोण $= \frac{360°}{n}$
- आन्तरिक कोण + बहीष्कोण $= 180°$
- विकर्णों की संख्या $= \frac{n(n-3)}{2}$
- परिमाप $= n \times a$
- आन्तरिक वृत्त की त्रिज्या $r = \frac{1}{2} a\cot\left(\frac{180}{n}\right)$
- परिवृत्त की त्रिज्या $R = \frac{1}{2} a\text{cosec}\left(\frac{180}{n}\right)$
- $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ अथवा $R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$
- बहुभुज का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} \times P \times r$
  $= \frac{1}{2} nar = \frac{1}{4} na^2 \cot\left(\frac{180}{n}\right)$

- किसी बहुभुज की भुजा में $x\%$ परिवर्तन किया जाता है, तो-
  (a) इसका परिमाप भी $x\%$ परिवर्तित होगा।
  (b) इसका विकर्ण भी $x\%$ परिवर्तित होगा।
  (c) इसका क्षेत्रफल $x\left(2 + \frac{x}{100}\right)\%$ परिवर्तित होगा।
  (d) इसके कोण अपरिवर्तित रहेंगे।

Note:- भुजा में वृद्धि होने पर x धनात्मक भुजा में कमी होने पर x ऋणात्मक

सम षष्टभुज (Hexagon)-

- समषष्टभुज की सभी भुजाऐं समान होती है अर्थात् समषष्टभुज 6 समबाहु त्रिभुजों से मिलकर बना होता है।



- **समषष्टभुज का क्षेत्रफल** $= 6\frac{\sqrt{3}}{4}$ **(भुजा)^2**
  $= \frac{3\sqrt{3}}{2}$ **(भुजा)^2**

वृत्त (Circle)

- वृत्त एक बंद आकृति है जो एक स्थिर बिंदु (केंद्र) से समान दूरी पर स्थित बिंदुओं से मिलकर बनती है। वृत्त की कुछ महत्वपूर्ण विशेषताएं हैं:

वृत्त की विशेषताएं

1. **केंद्र:** वृत्त का स्थिर बिंदु जिससे सभी बिंदु समान दूरी पर होते हैं।
2. **त्रिज्या:** केंद्र से वृत्त के किसी भी बिंदु तक की दूरी जो अचर (स्थिर) होती है।
3. **व्यास:** वृत्त की सबसे बड़ी जीवा जो केंद्र से गुजरती है और वृत्त को दो समान भागों में विभाजित करती है।
4. **परिधि:** वृत्त का परिमाप जो $2\pi r$ के बराबर होता है।
5. **क्षेत्रफल:** वृत्त का क्षेत्रफल जो πr^2 के बराबर होता है।

वृत्त से संबंधित सूत्र-

1. वृत्त की परिधि: $2\pi r$
2. वृत्त का क्षेत्रफल: πr^2
3. वृत्त का व्यास: $2r$

- यहां π एक ग्रीक शब्द है जो स्थिरांक है यह एक अपरिमेय संख्या है तथा इसका मान लगभग $\frac{22}{7}$ अथवा 3.14 होता है।
- वृत्त की त्रिज्या में $x\%$ वृद्धि करने पर क्षेत्रफल में वृद्धि $\left(2x + \frac{x^2}{100}\right)\%$

उदाहरण:-

वृत्त की त्रिज्या को दोगुना कर दिया जाये तो अब इसका क्षेत्रफल, पहले क्षेत्रफल का कितना गुना हो जाएगा?

व्याख्या:-

क्षेत्रफल पर प्रभाव $= \frac{(100\pm A)(100\pm B)}{100}$

यहाँ दोगुना का तात्पर्य 100% वृद्धि-

- यहां त्रिज्या में, व्यास में या परिधि में % कमी/वृद्धि हो और क्षेत्रफल पर प्रभाव पूछे तो यही सूत्र होगा क्योंकि तीनों का आपस में एक ही सम्बन्ध होता है।

तो $\frac{200\times200}{100} = 400$

अब क्षेत्रफल $= \frac{400}{100} = 4$ गुना हो जाएगा।

- यदि किसी वृत्त की त्रिज्या या व्यास में कुछ % कमी/वृद्धि हो रही है तो परिधि में भी उतनी ही % कमी या वृद्धि होगी।

चाप (Arc)-

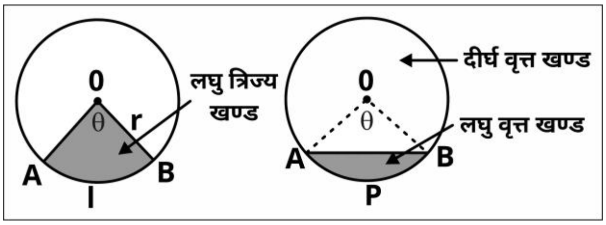
- वृत्त की परिधि पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं के मध्य परिधि का भाग वृत्त का चाप कहलाता है।

चाप की लम्बाई $AB = 2\pi r\frac{\theta}{360°}$

त्रिज्य खण्ड (Sector)-

- वृत्त के चाप के शिरों को केन्द्र से मिलाने वाली दो त्रिज्याओं और चाप से घिरा क्षेत्र त्रिज्य खण्ड कहलाता है।

लघु त्रिज्य खण्ड (AOB) का क्षेत्रफल $= \pi r^2\frac{\theta}{360°} = \frac{1}{2}lr$ यहां l चाप की लम्बाई है।



वृत्त खण्ड (Segment)-

- वृत्त की जीवा तथा चाप के मध्य क्षेत्र को वृत्त खण्ड कहते है।

लघु वृत्त खण्ड का क्षे. = त्रिज्य खण्ड APBO का क्षेत्रफल – △ AOB का क्षेत्रफल $= \pi r^2\frac{\theta}{360°} - \frac{1}{2}r^2\sin\theta$

अन्तः वृत्त (incircle) –

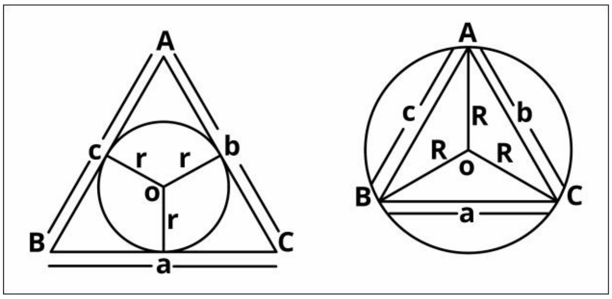
- त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करने वाला वृत्त अन्तः वृत्त कहलाता है तथा इसका केन्द्र अन्त: केन्द्र कहलाता है । अन्त: केन्द्र त्रिभुज की तीनों भुजाओं से समान दूरी पर स्थित होता है जिसे अन्तः त्रिज्या कहते है।

- **अन्त: वृत्त की त्रिज्या (radius of incircle)-**

$$r = \frac{\Delta}{s} = (s-a)\tan\frac{A}{2} = (s-b)\tan\frac{B}{2} = (s-c)\tan\frac{C}{2}$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= \frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{b\sin g\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{c\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$



- **समबाहु त्रिभुज में अन्त: वृत्त की त्रिज्या** $= \frac{\text{भुजा}}{2\sqrt{3}}$

अन्त: वृत्त में समबाहु त्रिभुज की भुजा $= 2\sqrt{3} \times$ त्रिज्या

- **समबाहु त्रिभुज में अन्त: वृत्त का क्षेत्रफल** $= \frac{\pi}{12}$ **(भुजा)** ^{2}

परिवृत्त (circum circle)-

- त्रिभुज की तीनों शीर्षों से गुजरने वाला वृत्त त्रिभुज का परिवृत्त कहलाता है तथा इसका केन्द्र परिकेन्द्र कहलाता है।
- परिकेन्द्र त्रिभुज के तीनों शीर्षों से समान दूरी पर स्थित होता है। जिसे परिवृत्त त्रिज्या कहते है।
- **परिवृत्त त्रिज्या (radius of circum circle)**

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = \frac{abc}{4\Delta}$$

- **समबाहु त्रिभुज में परिवृत्त की त्रिज्या** $= \frac{\text{भुजा}}{\sqrt{3}}$
- परिवृत्त में समबाहु त्रिभुज की भुजा $= \sqrt{3} \times$ त्रिज्या
- समबाहु त्रिभुज में परिवृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{\pi}{3}$ (भुजा) ^{2}

Note:- समबाहु त्रिभुज में परिवृत्त व अन्त:वृत्त के क्षेत्रफलों के मध्य 4: 1 का अनुपात होता है।

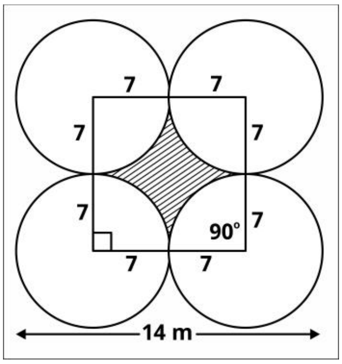
मुख्य बिन्दु :

- जब आयत का परिमाप और वर्ग का परिमाप समान हो तो वर्ग का क्षेत्रफल अधिक होगा।
- जब आयत, वृत्त, चतुर्भुज व त्रिभुज की परिमितियां समान हों तो इनमें वृत्त का क्षेत्रफल सबसे अधिक होगा।

उदाहरण:-

1. 14 मी. वर्गाकार घास के मैदान के चारों कोनों पर 4 घोड़े समान लम्बाई की रस्सी से बाँधे है। तो उनके द्वारा न चरे जा सकने वाले घास का क्षेत्रफल क्या होगा?

व्याख्या:-



– वर्गाकार घास के मैदान की क्षेत्रफल $= (14)^2 = 196\ \text{m}^2$

चारों त्रिज्या खण्डों की क्षेत्रफल $= 4\pi r^2 \frac{\theta}{360°}$

$4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times \frac{90}{360} = 154\ \text{m}^2$

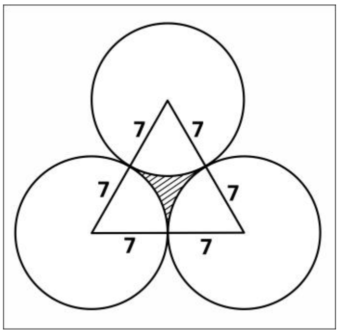
– न चरे जा सकने वाले घास के मैदान की क्षेत्रफल

$= 196 - 154 = 42\ \text{m}^2$

Note:- यहाँ चारो त्रिज्या खण्डों को हम एक वृत्त समझकर भी वर्ग के क्षेत्रफल में से घटा सकते है।

2. 7 सेमी के तीन वृत्ताकार टुकड़ों को सटाकर रखा गया है। तीनों वृत्तों बीच घिरे वाली स्थान का क्षेत्रफल क्या होगा?

व्याख्या:-



– समबाहु त्रिभुज की क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{ भुजा })^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (14)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 196$

$= 49\sqrt{3} = 84.86$ वर्ग सेमी.

तीन त्रिज्य खण्डों की क्षे. $= 3\pi r^2 \frac{\theta}{360°}$

$= 3 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times \frac{60}{360} = 77$ वर्ग सेमी.

– खाली स्थान का क्षेत्रफल $= 84.86 - 77 = 7.86$ वर्ग सेमी.

(ii) पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन (Surface Areas and Volumes)

त्रिविमिय अथवा ठोस आकृतियाँ (Three Dimensional Figures)

– ठोस ज्यामिति में हम ठोस आकृतियों के गुणों और उनके बीच के संबंधों का अध्ययन करते हैं। यहाँ कुछ महत्वपूर्ण अवधारणाएं हैं:

– **क्षेत्रफल और आयतन:** प्रत्येक वस्तु कुछ न कुछ स्थान घेरती है, जिसे उसका क्षेत्रफल कहते हैं। ठोस वस्तुओं के लिए, हम आयतन की बात करते हैं, जो वस्तु द्वारा घेरे हुए अंतरिक्ष की मात्रा है।

– **पृष्ठ और फलक:** ठोस वस्तुओं का बाहरी भाग, जिसे हम देख या छू सकते हैं, उसका पृष्ठ कहलाता है। फलक वे समतल सतहें हैं जो ठोस को घेरती हैं।

– **बहुफलक:** ऐसे ठोस जो केवल समतल फलकों से सीमाबद्ध होते हैं, बहुफलक कहलाते हैं।

– **आयलर का सूत्र:** किसी बहुफलक आकृति में, फलकों की संख्या (F), शीर्षों की संख्या (V), और कोरों की संख्या (E) के बीच आयलर का सूत्र है: F + V = E + 2

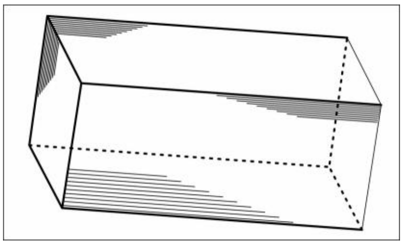
नोट: एक बहुफलक चार से कम फलकों से सीमाबद्ध नहीं हो सकता।

समान्तर षट्फलक (PARALLELEPIPEDS)-

– समान्तर षट्फलक एक ठोस आकृति है जो समान्तर समतलों के तीन जोड़ों द्वारा सीमाबद्ध होती है। इसके गुणों के बारे में कुछ महत्वपूर्ण बातें हैं:

1. समान्तर षट्फलक के फलक समान्तर चतुर्भुज होते हैं।
2. इसमें 6 फलक, 12 किनारे, और 8 कोने होते हैं।
3. इसका आयतन आधार के क्षेत्रफल और ऊंचाई के गुणनफल के बराबर होता है, अर्थात्:

   आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई



घन (CUBES)

– घन एक विशेष प्रकार का आयताकार ठोस है जिसके सभी फलक वर्गाकार होते हैं।

– इसके गुणों के बारे में कुछ महत्वपूर्ण बातें हैं:

1. घन का प्रत्येक फलक वर्गाकार होता है।
2. इसमें 6 फलक, 12 किनारे, और 8 कोने होते हैं।

(i) बहुपद (Polynomial)

बहुपद (Polynomial)

- बीजगणित का प्रारंभ लगभग 1550 ई. पूर्व में मिश्रवासियों द्वारा अज्ञात संख्याओं को व्यक्त करने के लिए संकेतों का प्रयोग करने से हुआ। भारतीय गणितज्ञों ने अज्ञात राशियों के लिए बीज, वर्ग आदि नाम दिया।
- बीजगणित में बीज (चर) राशियों का प्रयोग किया जाता है।
- बीजगणित में अज्ञात राशियों को व्यक्त करने के लिए संकेतों का प्रयोग किया जाता है।
- बीजगणित में समीकरणों का प्रयोग किया जाता है जो अज्ञात राशियों के बीच संबंधों को व्यक्त करते हैं।

चर राशियाँ और उनका महत्व –

- चर राशियाँ वे राशियाँ होती हैं जिनका मान परिवर्तित होता रहता है।
- चर राशियों को प्रतीक चिह्न या संकेत द्वारा प्रदर्शित किया जाता है, जैसे कि x, y, z, a, b, c
- चर राशियों पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की क्रियाएँ की जा सकती हैं।

अचर राशियाँ: परिभाषा और विशेषताएँ-

- अचर राशियाँ वे राशियाँ होती हैं जिनका मान स्थिर होता है।
- अचर राशियों के उदाहरण हैं अंकगणितीय संख्याएँ 0, 1, 5, 12, आदि।
- अचर राशियों पर क्रियाएँ नहीं की जा सकती हैं, क्योंकि उनका मान स्थिर होता है।

  जैसे- $6x, 2x+3,5y-2,\frac{x}{3}+4$ आदि।

बीजीय व्यंजक: परिभाषा और प्रकार-

- एक चर को स्वयं से अथवा किसी अन्य चर अथवा संख्यात्मक अचर से गुणा करने पर बीजीय व्यंजक का पद प्राप्त होता है
- बीजगणितीय व्यंजक वे व्यंजक होते हैं जिनमें चर राशियाँ और अचर राशियाँ शामिल होती हैं।

  जैसे- $3\times x\times x\times y=3x^2y$

  $2\times x\times x=2x^2$
- दो या दो से अधिक बीजीय पदो को जोडने पर बीजीय व्यंजक प्राप्त होता है

  जैसे- $3x^2y+2x^2,5x+(-3y)$

  अर्थात् कुछ निश्चित चर तथा अचर राशियाँ के योग, अंतर, गुणन भाग आदि के संयोजन से बने पदों के समूह को बीजीय व्यंजक कहते हैं।

  (1) बीजीय व्यंजक चर (बीज) तथा अचर (संख्याओं) की सहायता से बनते है।

  (2) बीजीय बहुपद में कम से कम एक चर राशि अवश्य होती है।

  (3) किसी भी बीजीय बहुपद का मान चरों के मान पर निर्भर करता है।

गुणांक: परिभाषा और महत्व-

- गुणाँक बीजीय पद का एक गुणनखण्ड होता है, जो पद के शेष भाग का गुणांक कहलाता है।
- बहुपदों के प्रत्येक पद में वास्तविक संख्याएँ गुणांक कहलाती हैं।
- बीजीय पद का कोई भी गुणनखण्ड, पद के शेष भाग का गुणांक कहलाता है अर्थात बहुपदों के प्रत्येक पद में वास्तविक संख्याऐं गुणांक कहलाती है।
- किसी बीजीय पद को उसके गुणन खण्डों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है।
- इसका संख्यात्मक गुणनखण्ड इसका संख्यात्मक गुणाँक अथवा अचर गुणाँक (Constant Cofficient) कहलाता है
- जब कि चर तथा अचर (अथवा केवल चर) सहित शेष सभी गुणनखण्ड गुणाँक कहलाते है।

  $4x^2y$ में x^2y का अचर गुणाँक $=4$

  $4x^2y$ में x^2 का गुणाँक $=4y$

  $4x^2y$ में y का गुणाँक $=4x^2$

Note - गुणाँक संख्यात्मक अथवा बीजीय हो सकता है।

उदाहरण:

1. निम्नलिखित बहुपदों में x^2 के गुणांक लिखिए-

(i) $2+x^2+x$ (ii) $2-x^2+x^3$

(iii) $\frac{\pi}{2}\cdot x^2+x$ (iv) $\sqrt{2}x-1$

व्याख्या:-

(i) $2+x^2+x$ में x^2 का गुणांक $=1$

(ii) $2-x^2+x^3$ में x^2 का गुणांक $=-1$

(iii) $\frac{\pi}{2},x^2+x$ में x^2 का गुणांक $=\frac{\pi}{2}$

(iv) $\sqrt{2}x-1$ में x^2 का गुणांक $=0$

बहुपद (Polynomial)

- एक या एक से अधिक बीजीय पदों वाला व्यंजक बहुपद (Polynomial) कहलाता है।

बहुपद के गुण:

- बहुपद में एक या एक से अधिक बीजीय पद होते हैं।
- बहुपद में प्रत्येक पद एक बीजीय पद होता है।
- बहुपद में पदों को जोड़ने के लिए + या - चिह्न का उपयोग किया जाता है।

  जैसे- पूर्णांकों पर बहुपद- $3x^2 - 4x + 3$

  परिमेय संख्याओं पर बहुपद- $\frac{3}{4}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 2x - 1$

  वास्तविक संख्याओं पर बहुपद- $3x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{3}$

समान पद (Like Terms)-

- वे बीजीय पद जिनके बीजीय गुणनखण्ड समान हो समान पद अथवा सजातीय पद (Like Terms) कहलाते है।
- सजातीय पदों में चर तथा उसकी घात समान होती है केवल उनका संख्यात्मक मान भिन्न हो सकता है।

  जैसे- $5y^2$ व $25y^2$

विजातीय पद (Unlike Terms)-

- वे बीजीय पद जिनके बीजीय गुणनखण्ड भिन्न-भिन्न हो विज़ातीय पद अथवा असमान पद (Unlike terms) कहलाते हैं। विजातीय पद में प्रयुक्त चर अथवा उनकी घात भिन्न-भिन्न होती है।

  जैसे- $3xy - 5x^2 + 4xy + 3x^2 - 4x$ में $3xy$ तथा $4xy$ समान पद $-5x^2$ तथा $3x^2$ समान पद $3xy$ तथा $-5x^2$ असमान पद।

बीजीय व्यंजक बहुपद होगा यदि-

(1) चर राशि का घाताँक सदैव धनात्मक पूर्णांक हो।

(2) प्रत्येक पद में चर का संख्यात्मक गुणाँक वास्तविक संख्या हो।

(3) पदों की संख्या निश्चित (सीमीत) (गणनीय) हो। बहुपद, पदों से मिलकर बनते है।

- बहुपद को बनाने हेतु पदों को जोड़ा अथवा घटाया जाता है। अर्थात जब दो या दो से अधिक बीजीय पद + या - चिन्ह के साथ जुड़ी हो तो वे बहुपद (Polynomial) कहलाती हैं।

> **Note-** बहुपद में चर की घात सदैव ऋृणेतर (non-negative) या धन पूर्णांक या प्राकृत संख्या ही होती है
> जैसे- $5x^3 - 2x^2 + x + 3$

- यदि किसी बहुपद में किसी चर की घातांक ऋृणात्मक या शुद्ध भिन्न है तो वह व्यंजक बहुपद नहीं होगा।
- जैसे- $\sqrt[3]{y} + y^3$ या $y^3 + y^3$ बहुपद नहीं है। क्योंकि व्यंजक की घात पूर्ण संख्या नहीं है।
- $x + \frac{1}{x^2}$ बहुपद नहीं है क्योंकि $\frac{1}{x^2}$ में x की घात ऋृणात्मक है।

पदों के आधार पर बहुपद-

1. **शून्य बहुपद (Zero Polynomial) -** ऐसे बहुपद, जिसके सभी गुणांक शून्य हों, शून्य बहुपद कहलाता है।

   जैसे- $0x^3 + 0x^2 + 0$

- शून्य बहुपद का मान हमेशा शून्य होता है।

2. **एकपदी बहुपद (Monomial) -** ऐसे बहुपद, जिसमें केवल एक पद हो, एकपदी बहुपद कहलाता है।

   जैसे- $5x^2y^2, 7x$

3. **द्विपदी बहुपद (Binomial) -** ऐसे बहुपद, जिसमें केवल दो पद हों, द्विपदी बहुपद (द्विपद) कहलाता है।

   जैसे- $7x^2 + 5y$

4. **त्रिपदी बहुपद (Trinomial) -** ऐसे बहुपद, जिसमें केवल तीन पद हों त्रिपदी बहुपद (त्रिपद) कहलाता है।

   जैसे- $4x^2 + 7xy + 3y^2$

उदाहरण:

निम्नलिखित बहुपदों को एकपदी, द्विपदी और त्रिपदी में वर्गीकृत कीजिए

(i) x^2

(ii) $y^2 + 8y$

(iii) $7y^6 + 12y$

(iv) $y + y^2 + 4$

(v) $x - x^3$

व्याख्या:-

(i) $y^2 =$ एकपदी

(ii) $m^2 + 8m =$ द्विपदी

(iii) $7u^6 + 12u =$ द्विपदी

(iv) $y + y^2 + 4 =$ त्रिपदी

(v) $x - x^3 =$ द्विपदी

बहुपद की घात (Power of Polynomial)-

- बहुपद में, चर की सबसे बड़ी घात वाले पद के घातांक को उस बहुपद की घात कहते हैं।

  जैसे- $3x^3 - 2x^2 + 6x + 6$ में सबसे बड़ी घात तीन है तो इसे त्रिघातीय बहुपद कहते है।

चर ' x ' में n घातिय बहुपद –

- $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots .... + a_{n-1}x + a_n$

  जहाँ $a_0, a_1, a_2, \dots \dots a_n$ वास्तविक संख्याएँ है।

घात के आधार पर बहुपद-

1. **एक घातीय बहुपद या रेखीय बहुपद -**

- ऐसे बीजीय व्यंजक जिसमें चर राशि की अधिकतम घात एक हो एक घातीय बहुपद या रेखीय बहुपद कहलाते हैं।

  जैसे- $2x + 3, 3x - 5, 4x, -5x$ आदि।

2. द्विघातीय बहुपद –

– ऐसे बीजीय व्यंजक जिसमें चर राशि की अधिकतम घात 2 हो द्विघातीय बहुपद कहलाते हैं।
जैसे- $2x^2 + 3x + 2, 3x^2 - 4x - 5, 4x^2 - 5x$ आदि।

3. त्रिघातीय बहुपद –

– ऐसे बीजीय व्यंजक जिसमें चर राशि की अधिकतम घात 3 हो त्रिघातीय बहुपद कहलाते है।
जैसे- $8x^3 - 5x^2 + 4x, 7x^3 - 6x^2$

4. चतुर्घातीय बहुपद-

– ऐसे बीजीय व्यंजक जिसमें चर राशि की अधिकतम घात 4 हो चतुर्धातीय बहुपद कहलाते हैं।
जैसे- $3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 5x + 3, x^4 + 3x + 5$ आदि।

5. अचर बहुपद –

– सभी अचर राशियाँ शून्य घात बहुपद अथवा अचर बहुपद कहलाती है। जैसे- सभी अशून्य अचर - 5,19 आदि।

Note-अशून्य अचर पद वाले बहुपद की घात शून्य होती है।

बहुपद घात बहुपद का सूत्र

शून्य बहुपद	0	$f(x) = a, a$ is constant
रेखिय बहुपद	1	$f(x) = ax + b, a \neq 0$
द्विघात बहुपद	2	$f(x) = ax^2 + bx + c$
त्रिघात बहुपद	3	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
चतुर्घात बहुपद	4	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

उदाहरण:

निम्नलिखित बहुपदों की घात ज्ञात कीजिए-

(i) $3x^3 + 4x^2 + 2x$

(ii) $3 - 2y^2$

(iii) $3t - \sqrt{7}$

(iv) $5x^5y^2z + 3xyz$

व्याख्या:-

(i) $3x^3 + 4x^2 + 2x$ की घात = 3

(ii) $3 - 2y^2$ की घात = 2

(iii) $3t - \sqrt{7}$ की घात = 1

(iv) $5x^5y^2z$ में $5 + 2 + 1 = 8$ घात है।

बहुपद का मान (Value of Polynonial)-

– बहुपद f(x) में x के स्थान पर वास्तविक संख्या α रखने पर प्राप्त संख्यात्मक मान, बहुपद f(x) के मान को प्रदर्शित करता है, जिसे f(α) से व्यक्त करते हैं।

यहाँ पर:

f(x) = बहुपद

x = चर

α = वास्तविक संख्या

n = बहुपद की घात

उदाहरण:

$f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

$x = 1$ पर,

$f(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 2 = 5 - 3 + 2 = 4$

$x = \frac{1}{2}$ पर,

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{5}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{4}$

बीजीय व्यंजकों पर गणितीय संक्रियाएं (Operations on Algebric Expression)

बीजीय व्यंजकों को जोड़ना व घटाना-

1. जोड़ व घटाव की क्रिया सजातीय पदों में ही संभव है।
2. सजातीय पदों के गुणांक आपस में जुड़ते हैं या घटते हैं।
3. बीजांक की घातें वही रहती हैं।

बीजीय व्यंजकों का गुणन-

1. एकपदी का एकपदी से गुणनफल एकपदी ही होगा।
2. बहुपद को एकपदी से गुणा करने के लिए बहुपद का प्रत्येक एकपदी से गुणा किया जाएगा।
3. बहुपद का बहुपद से गुणा के समय प्रथम बहुपद का प्रत्येक पद अलग-अलग दूसरे पूरे बहुपद से गुणा किया जाएगा।
4. फिर सजातीय पदों में योग व व्यवकलन की क्रिया होगी।

बीजीय व्यंजकों का भाग-

– बहुपद में एकपदी के विभाजन हेतु प्रत्येक पद में एकपदी का विभाजन करते हैं।

उदाहरण:

1. $5a^2 - 10a - 2, a^2 + 2a + 1$ और $6a - 4$ योग कीजिए-

व्याख्या:-

$5a^2 - 10a - 2$
$a^2 + 2a + 1$
$6a - 4$
$6a^2 - 2a - 5$

2. $x^4 + 3x^3 + 2x + 6$ तथा $x^4 - 3x^2 + 6x + 2$ के योगफल में से $4x^3 - 3x + 4$ को घटाइऐ-

व्याख्या:-

$x^4 + 3x^3 + 2x + 6$
$x^4 - 3x^2 + 6x + 2$
$-4x^3 + 3x - 4$
$2x^4 - x^3 - 3x^2 + 11x + 4$

घटाते समय नीचे वाले संख्याओं के चिन्ह परिवर्तित जाते हैं।

3. $2x^2 + 3xy$ प्राप्त करने हेतु $x^2 + xy + y^2$ में क्या जोड़ा जाना चाहिए?

व्याख्या:-

माना वह व्यंजक P है

$(x^2 + xy + y^2) + P = 2x^2 + 3xy$

$P = (2x^2 + 3xy) - (x^2 + xy + y^2)$

$P = 2x^2 + 3xy - x^2 - xy - y^2$

$P = 2x^2 - x^2 + 3xy - xy - y^2$

$P = x^2 + 2xy - y^2$

अतः उसमें $x^2 + 2xy - y^2$ जोड़ा जाना चाहिए।

4. $a + 5b$ का $2a + b$ से गुणा कीजिए-

व्याख्या:-

$(a + 5b) \times (2a + b)$

$= a(2a + b) + 5b(2a + b)$

$= 2a^2 + ab + 10ab + 5b^2$

$= 2a^2 + 11ab + 5b^2$

5. $x^2 + 3x + 2$ और $x^2 + 3x + 1$ का गुणा कीजिए-

व्याख्या:-

$(x^2 + 3x + 2) \times (x^2 + 3x + 1)$

$= x^2(x^2 + 3x + 1) + 3x(x^2 + 3x + 1) + 2(x^2 + 3x + 1)$

$= x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x^3 + 9x^2 + 3x + 2x^2 + 6x + 2$

$= x^4 + 3x^3 + 3x^3 + x^2 + 9x^2 + 2x^2 + 3x + 6x + 2$

$= x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 9x + 2$

6. $x^2 + 6x + 8$ में $x + 4$ का भाग दीजिए-

व्याख्या:-

```
x + 4 ) x² + 6x + 8 ( x + 2
       -x² + 4x
       ----------
             2x + 8
            -2x + 8
       ----------
                0
```

बहुपद $x^2 + 6x + 8$ को $(x + 4)$ से भाग देने पर भागफल $(x + 2)$ तथा शेषफल शून्य प्राप्त होता है

$\because$ भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$x^2 + 6x + 8 = (x + 4)(x + 2)$

7. यदि $(x^3 - 3x^2 + x + 2)$ को एक बहुपद $f(x)$ से भाग देने पर भागफल और शेषफल क्रमश $(x - 2)$ और $(-2x + 4)$ हो तो $f(x)$ का मान ज्ञात करो।

व्याख्या:-

भाज्य $= x^3 - 3x^2 + x + 2$

भागफल $= x - 2$

भाजक $f(x) = ?$

शेषफल $= -2x + 4$

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$x^3 - 3x^2 + x + 2 = f(x) \times (x - 2) + (-2x + 4)$

$x^3 - 3x^2 + x + 2 + 2x - 4 = f(x) \times (x - 2)$

$f(x) = \frac{(x^3 - 3x^2 + 3x - 2)}{(x - 2)} = (x^2 - x + 1)$

बहुपद के शून्यक (Zeroes of Polynomial)-

- यदि बहुपद $f(x)$ में $x = \alpha$ रखने पर $f(\alpha) = 0$ हो तो α बहुपद $f(x)$ का शून्यक (Zero) कहलाता है।

  अर्थात्, बहुपद का शून्यक वह मान होता है जिसे बहुपद में रखने पर परिणाम शून्य होता है।

  जैसे- $f(x) = x^2 - 3x + 2$

  $f(1) = (1)^2 - 3(1) + 2$

  $= 1 - 3 + 2 = 0$

  अतः $x = 1$ बहुपद $f(x)$ का शून्यक कहलाता है।

- **बहुपद $f(x)$ के शुन्यकों की अधिकतम संख्या, बहुपद की घात के बराबर होती है।** किन्तु यह आवश्यक नहीं कि बहुपद के सभी शुन्यक वास्तविक हो-

  जैसै- $f(x) = x^2 + x + 1$ का कोई वास्तविक शुन्यक नहीं

  $f(x) = x^2 + 9$ का कोई वास्तविक शुन्यक नहीं

उदाहरण:

1. बहुपद $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ के दो शून्यक $\sqrt{2}$ तथा $-\sqrt{2}$ हो तो शेष दो शून्यक ज्ञात करो?

व्याख्या:-

$:x = -\sqrt{2}$ तथा $x = \sqrt{2}$ दिये गये बहुपद के दो शून्यक हैं

अतः $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$ दिये गये बहुपद का एक गुणक होगा।

शेष गुणक ज्ञात करने के लिए $x^2 - 2$ से बहुपद $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ को विभाजित करने पर भागफल $(2x^2 - 3x + 1)$ तथा शेषफल शून्य प्राप्त होता है।

अतः

$2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$

$= (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$

$= (x^2 - 2)(x - 1)(2x - 1)$

अतः शेष दो शून्यक $= 1, \frac{1}{2}$

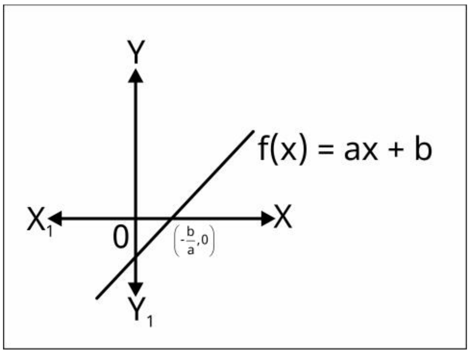
- **बहुपद $y = f(x)$ का ज्यामिति आलेख (Graph) X-अक्ष को जिन बिन्दुओं पर काटता है, उन बिन्दुओं के X - निर्देशांक (भुज) बहुपद $f(x)$ के शुन्यक को प्रदर्शित करता है।**

(1) रैखिक बहुपद (Linear Polynomial) -

– रैखिक बहुपद $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ के लिए ग्राफ एक सरल रेखा प्राप्त होती है जो X - अक्ष को केवल एक बिन्दु $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ पर काटती है।

अतः रैखिक बहुपद $f(x) = ax + b$

का एक मात्र शुन्यक $\left(x = -\frac{b}{a}\right)$ प्राप्त होता है



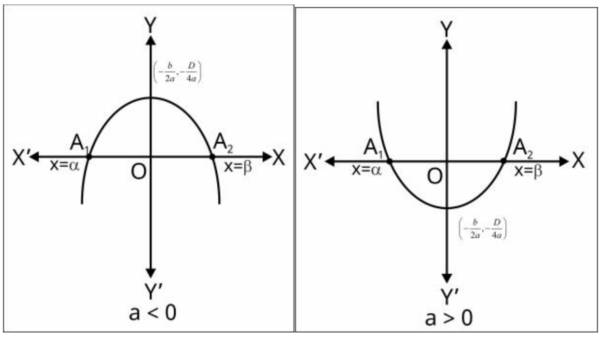
(2) द्विघातीय बहुपद (Quadratic Polynomial) –

– किसी द्विघाती बहुपद के लिए ग्राफ परवलयाकार (Parabolic) प्राप्त होता है।

TYPE I- यदि द्विघातीय बहुपद के दो वास्तविक गुणनखण्ड संभव हो

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$

– जहाँ α, β वास्तविक संख्या हो तो द्विघातीय बहुपद के लिए प्राप्त परवलायाकार वक्र X - अक्ष को दो वास्तविक बिन्दुओं $x = \alpha$ तथा $x = \beta$ पर मिलता है।



$y = f(x) = ax^2 + bx + c$

$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{D}{4a}\right)$ जहाँ $D = b^2 - 4ac$

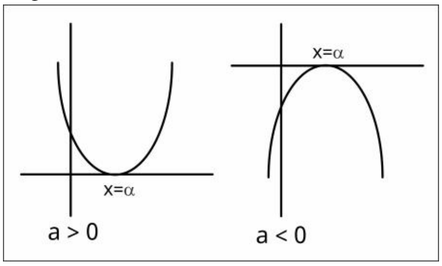
परवलय का शीर्ष $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$

– द्विघातीय बहुपद के दो शून्यक $x = \alpha$ तथा $x = \beta$ प्राप्त होता है।

TYPE II- यदि द्विघातीय बहुपद के दोनों गुणनखण्ड समान ($\boldsymbol{\alpha = \beta}$) हो

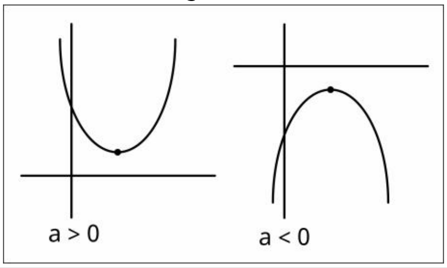
$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$

– इस स्थिति में बहुपद का ग्राफ X - अक्ष को $x = \alpha$ पर स्पर्श करता हुआ परवलाकार प्राप्त होता है। अतः बहुपद के दो समान शून्यक $x = \alpha$ प्राप्त होते है ।



TYPE III - यदि बहुपद $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ के वास्तविक गुणनखण्ड संभव नहीं हो

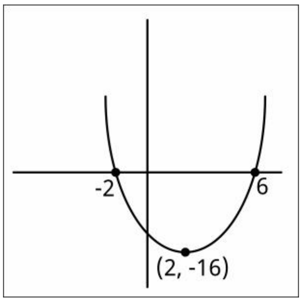
अर्थात् α और β सम्मिश्र राशि हो तो बहुपद का ग्राफ X – अक्ष को वास्तविक बिन्दुओं पर मिलता नहीं है।



उदाहरण:

1. $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x - 12}$

व्याख्या:-



$f(x) = x^2 - 4x - 12$

$= (x - 2)^2 - 16$

$= (x - 2 - 4)(x - 2 + 4)$

$= (x - 6)(x + 2)$

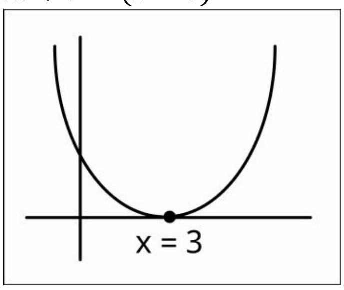
शीर्ष $(2, -16)$

शुन्यक 6 तथा -2

2. $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6x + 9}$

व्याख्या:-

$f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$



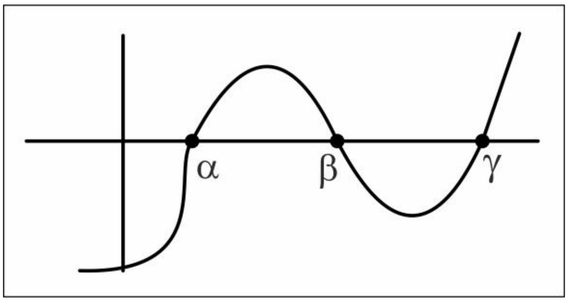
(3) त्रिघातीय बहुपद (Trinomial)-

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$= a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

TYPE I- α, β, γ तीन वास्तविक तथा भिन्न-भिन्न संख्या संभव हो तो बहुपद का ग्राफ X - अक्ष को तीन बिन्दुओं पर मिलता है।

- α, β, γ बहुपद के तीन वास्तविक तथा भिन्न-भिन्न शुन्यक

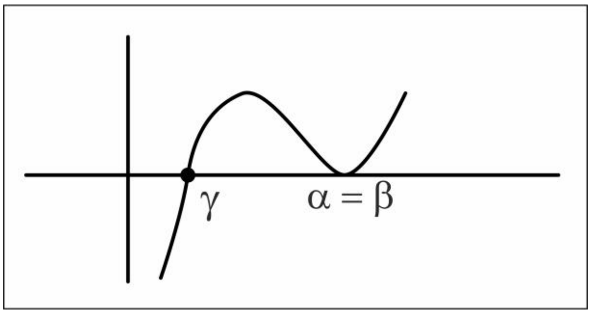


TYPE II $-\alpha, \beta, \gamma$ तीनों वास्तविक तथा कोई दो समान

$(\alpha = \beta \neq \gamma)$ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

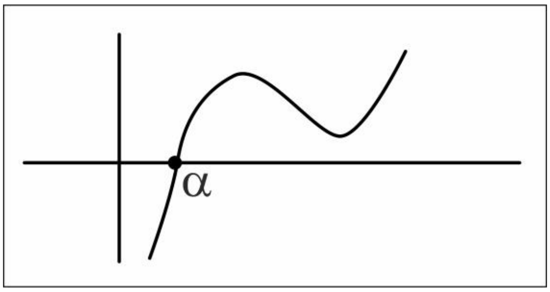
$= a(x-\alpha)^2(x-\gamma)$

- बहुपद का ग्राफ X - अक्ष को दो बिन्दुओं पर मिलता है, बहुपद के शून्यक α, α, γ



TYPE III- α, β, γ में एक (α) वास्तविक शेष दो सम्मिश्र राशि हो तो वक्र X - अक्ष को केवल एक बिन्दु पर मिलता है।

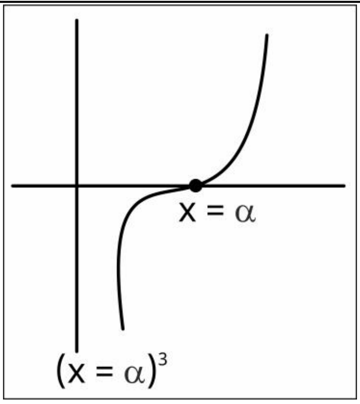
- बहुपद का एक मात्र शून्यक α



TYPE IV- $(\alpha = \beta = \gamma)$ वास्तविक तथा समान

$f(x) = a(x-\alpha)^3$

- इस स्थिति में भी वक्र X - अक्ष को केवल एक बिन्दु पर मिलता है। बहुपद के तीन समान शुन्यक α, α, α



$(x-\alpha)^3$

- अंतः त्रिघातीय बहुपद के लिए ग्राफ X - अक्ष को कम से कम एक तथा अधिकतम तीन बिन्दुओं पर मिलता है। अर्थात त्रिघातीय बहुपद के वास्तविक शून्यकों की संख्या एक अथवा तीन होती है।

बहुपद के गुणाँकों तथा शून्यकों के सम्बन्ध -

- द्विघातीय बहुपद $f(x) = ax^2 + bx + c$

$= a(x-\alpha)(x-\beta)$

$= a(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta)$

- गुणॉकों की तुलना करने पर

शून्यकों का योग $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

शून्यकों का गुणन $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

द्विघातीय बहुपद-

- $a[x^2 -$ (शून्यकों का योग) $x +$ (शुन्यकों का गुणन)]

यदि α और β वास्तविक हो अर्थात् $b^2 - 4ac > 0$ हो तथा

$\because \alpha\beta = \frac{c}{a}$

TYPE I- अत: c और a समान चिन्ह के होने पर α और β समान चिन्ह युक्त $\because \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

- अत: $b > 0$ होने पर α, β दोनों ऋणात्मक $b < 0$ होने पर α, β दोनों धनात्मक

जैसे-

(i) $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

शून्यक $= 2,3$

(ii) $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

शून्यक $= -2, -3$

TYPE II- c और a परस्पर विपरित चिन्ह के होने पर α और β दोनों परस्पर विपरित चिन्ह युक्त

जैसे-

(i) $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

शून्यक $= 1, -3$

(ii) $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

शून्यक $= -1,3$

TYPE III- $c = a$ **होने पर** $\alpha\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\alpha}$ **दोनों शून्यक एक दूसरे के प्रतिलोम**

जैसे- $2x^2 - 5x + 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$

शून्यक $= \frac{1}{2}, 2$

$\because \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

अत: $b = 0$ होने पर $\beta = -\alpha$

जैसे- $f(x) = 6x^2 - 3 = 3(x^2 - 2)$

$= 3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

शून्यक $= \sqrt{2}$ तथा $-\sqrt{2}$

त्रिघाती बहुपद-

- $t(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$= a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$= a[x^2 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma]$

तुलना करने पर-

$\alpha+\beta+\gamma = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{-x^2 \text{ का गुणाँक}}{x^3 \text{ का गुणाँक}}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{x \text{ का गुणाँक}}{x^3 \text{ का गुणाँक}}$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = -\frac{\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणाँक}}$

उदाहरण:

यदि द्विघाती व्यंजक के शून्यक $2 \pm \sqrt{3}$ हो तो द्विघाती व्यजंक ज्ञात करो।

व्याख्या:-

शून्यकों का योग $= (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$

शून्यकों का गुणन $= (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$

अत: द्विघातीय बहुपद

$a[x^2 -$ (शून्यकों का योग) $x +$ (शून्यकों का गुणन)]

$= a[x^2 - 4x + 1]$

विशेष स्थिति में बहुपद के मान ज्ञात करना-

TYPE 1. $(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$

$(x-a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$

$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

$(x-a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

TYPE 2:- शेषफल प्रमेय (Reminder Theorem) :

- बहुपद $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ को $(x-\alpha)$ से विभाजित करने पर शेषफल $f(\alpha)$ होगा।
- गुणनखंड प्रमेय (Factor Theorem): यदि $f(\alpha) = 0$ हो तो $(x-\alpha)$ बहुपद (x) का एक गुणन खण्ड होगा अर्थात् f(x), $(x-\alpha)$ से पूर्णतया विभाज्य होगा।

उदाहरण:

1. यदि $x = 51$ हो तो $x(x^2 - 3x + 3)$ का मान ज्ञात करो?

व्याख्या:-

$X(x^2 - 3x + 3) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1$

$= (x-1)^3 + 1$

$x = 51$ पर $= (51-1)^3 + 1 = 125001$

2. $x^{29} - x^{26} - x^{23} + 1$ के गुणन खण्ड

(a) $(x-1)$ है किंतु $(x+1)$ नहीं

(b) $(x+1)$ है किंतु $(x-1)$ नहीं

(c) दोनों

(d) कोई नहीं

व्याख्या:--

$\because (1)^{29} - (1)^{23} - (1)^{23} + 1$

$= 1 - 1 - 1 + 1 = 0$

अत: $(x-1)$ दिये गये व्यंजक का एक गुणन खण्ड

पुन: $(-1)^{29} - (-1)^{26} - (-1)^{23} + 1$

$= -1 - 1 + 1 + 1 = 0$

अत: $(x+1)$ दिये गये व्यंजक का एक गुणनखण्ड

3. $ax^3 + bx^2 + 3x + 5$ के दो गुणनखण्ड $(x+1)$ तथा $(x-1)$ हो तो a, b का मान ज्ञात करो?

व्याख्या:-

$\because (x+1)$ व्यंजक का एक गुणन खण्ड है अत:

$a(-1)^3 + b(-1)^2 + 3(-1) + 5 = 0$

$\Rightarrow -a + b + 2 = 0 \ldots$

पुन: $(x-1)$, व्यंजक का एक गुणनखण्ड है अत:

$a(1)^3 + b(1)^2 + 3(1) + 5 = 0$

$\Rightarrow a + b + 8 = 0.$

(i) व (ii) को हल करने पर $a = -3, b = -5$

TYPE 3:-

(i) यदि $x + \frac{1}{x} = 1$ अथवा $x^2 - x + 1 = 0$ हो तो $x^3 = -1$

(ii) यदि $x + \frac{1}{x} = -1$ अथवा $x^2 + x + 1 = 0$ हो तो $x^3 = 1$

उदाहरण:

1. यदि $x + \frac{1}{x} = 1$ हो तो $x^{40} + \frac{1}{x^{40}} = ?$

व्याख्या:-

$x^{40} = x^{39}x = (x^3)^{13} \cdot x = (-1)^{13}x = -x$

तथा $\frac{1}{x^{40}} = \frac{1}{x^{39}x} = \frac{1}{(x^3)^{13}x} = -\frac{1}{x}$

अत : $x^{40} + \frac{1}{x^{40}} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -1$

2. **यदि $x+\frac{1}{x}=1$ हो तो $x^{91}+x^{90}+x^{89}+x^{88}+x^{87}+x^{86}=?$**

व्याख्या:-

$\because x+1/x=1$ हो तो $x^3=-1$

$x^{91}+x^{88}+x^{90}+x^{87}+x^{89}+x^{86}$

$x^{88}(x^3+1)+x^{87}(x^3+1)+x^{86}(x^3+1)$

$=0+0+0=0$

3. **$x+\frac{1}{x}=3$ हो तो $x^7+\frac{1}{x^7}=?$**

व्याख्या:-

$\because x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=7$

$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=49-2=47$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=27-3.3=18$

$x^7+\frac{1}{x^7}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=47\times18-3=846-3=843$

4. **यदि $a-b+5=0$ तथा $(x-a)(x-b)=1$ हो तो $(x-a)^3-\frac{1}{(x-a)^3}=?$**

व्याख्या:-

माना $x-a=y$

$\Rightarrow (x-a)(x-b)=1$

$\Rightarrow y(y+a-b)=1$

$\Rightarrow y(y-5)=1$

$[\because a-b+5=0]$

$\Rightarrow y-5=\frac{1}{y}\Rightarrow y-\frac{1}{y}=5$

$\Rightarrow y^3-\frac{1}{y^3}=\left(y-\frac{1}{y}\right)^3+3\left(y-\frac{1}{y}\right)$

$=(5)^3+3\times5=140$

$\Rightarrow (x-a)^3-\frac{1}{(x-a)^3}=140$

TYPE 4 :- $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ हो तो $x^3+\frac{1}{x^3}=0$ अथवा $x^6=-1$

उदाहरण:

1. **यदि $x+\frac{1}{x}=4$ हो तो $x^2+\frac{1}{x^2}$ का मान बताओ।**

व्याख्या:-

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$

2. **यदि $x+\frac{1}{x}=3$ हो तो $x^4+\frac{1}{x^4}$ का मान बताओ।**

व्याख्या:-

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$

$x^2+\frac{1}{x^2}=7,$

$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=7^2-2=47$

3. **यदि $x+\frac{1}{x}=2$ हो तो $x^3+\frac{1}{x^3}$ का मान बताओ।**

व्याख्या:-

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=2^3-3.2$

$=8-6=2$

4. **यदि $a^2+a+1=0$ हो तो$a^5+a^4+1=\ ?$**

व्याख्या:-

$\because a^2+a+1=0\Rightarrow a^3=1$

$\Rightarrow a^5+a^4+1=a^3a^2+a^3a+1$

$\Rightarrow 1a^2+1a+1$

$=a^2+a+1=0$

5. **यदि $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ हो तो $x^{100}+\frac{1}{x^{100}}=?$**

व्याख्या:-

$\because x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}\Rightarrow x^6=-1$

$x^{100}+\frac{1}{x^{100}}=\frac{x^{102}}{x^2}+\frac{x^2}{x^{102}}$

$=\frac{(x^6)^{17}}{x^2}+\frac{x^2}{(x^6)^{17}}$

$=\frac{(-1)^{17}}{x^2}+\frac{x^2}{(-1)^{17}}$

$=-\left[\frac{1}{x^2}+x^2\right]=-\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]$

$=-[(\sqrt{3})^2-2]=-(3-2)=-1$

TYPE 5 :- यदि $x^2+y^2+z^2=0$ हो तो $x=y=z=0$ अर्थात् पूर्ण वर्ग संख्या का योग शुन्य केवल और केवल तभी संभव है जबकि प्रत्येक संख्या पृथक-पृथक शुन्य के बराबर हो।

उदाहरण:

1. **यदि $(a-2)^2+(b-5)^2+(c+1)^2=0$ हो तो $\sqrt{(a+b+c)}=?$**

व्याख्या:-

$\because (a-2)^2+(b-5)^2+(c+1)^2=0$

$\Rightarrow a=2, b=5, c=-1$

$\sqrt{a+b+c}=\sqrt{2+5-1}=\sqrt{6}$

2. **$a^2+b^2+c^2=2(a+2b-2c)-9$ हो तो $a+b+c=?$**

व्याख्या:-

$\because a^2+b^2+c^2=2(a+2b-2c)-9$

$(a^2-2a)+(b^2-4b)+(c^2+4c)=-9$

$(a^2-2a+1)+(b^2-4b+4)+(c^2+4c+4)$

$=1+4+4-9$

$(a-1)^2+(b-2)^2+(c+2)^2=0$

अतः $a=1, b=2, c=-2$

$a+b+c=1+2-2=1$

गुणनखण्डन (Factorisation)

- गुणनखण्ड का अर्थ है किसी संख्या या बीजीय व्यंजक को दो या दो से अधिक संख्याओं या व्यंजकों के गुणन के रूप में प्रदर्शित करना।
- **गुणनखण्ड = गुणन + खण्ड**

अर्थात किसी संख्या को दो या दो से अधिक संख्याओं को गुणन रूप में लिखने की प्रक्रिया गुणनखण्ड कहलाती है जैसे- $40 = 2 \times 20$

= 4 × 10

= 2 × 2 × 2 × 5

- **समान्यतया गुणनखण्ड से तात्पर्य किसी भी संख्या को अभाज्य संख्याओं के गुणन के रूप में प्रदर्शित करना होता है जैसे-**

$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$45 = 3 \times 3 \times 5$

- **बीजीय व्यंजकों के गुणनखण्ड -** बीजीय व्यंजकों को अखण्डनीय पदों के गुणन के रूप में प्रदर्शित करने की प्रक्रिया गुणनखण्ड कहलाती है तथा अखण्डनीय पद, गुणनखण्ड कहलाते है।

$10xy = 2 \times 5x \times y$

बीजीय व्यंजक के गुणनखण्ड संख्याओं, बीजीय चरो अथवा बीजीय व्यंजक के रूप में हो सकते है।

Note- गुणनखण्डन प्रक्रिया, गुणन प्रक्रिया की प्रतिलोम प्रक्रिया है।

गुणन: -

$3x(4x - 5y) = 12x^2 - 15xy$

$(x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6$

गुणनखण्डन: -

$12x^2 - 15xy = 3x(4x - 5y)$

$x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2)$

गुणनखण्डन की विधि (Methods of Factoristion)-

1. सार्वगुणनखण्ड विधि –

(i) सार्वपद एक पद हो-

(a) दिये गये बीजीय व्यंजक के सभी पदों का H.C.F ज्ञात करो

(b) प्रत्येक पद को H.C.F से विभाजित करो

(c) H.C.F तथा step (b) से प्राप्त भागफल का गुणन दिये गये बीजीय व्यंजक का गुणनखण्ड होगा।

उदाहरण:

1. $18a^3 - 27a^2b$

व्याख्या:-

$18a^3$ और $27a^2b$ का H.C.F. $= 9a^2$

अत: $18a^3 - 27a^2b = 9a^2(2a - 3b)$

2. $12a^2b - 9ab^2 + 6ab$

व्याख्या:-

$12a^2b, 9ab^2$ और $6ab$ का H.C.F $= 3ab$

$12a^2b - 9ab^2 + 6ab = 3ab(4a - 3b + 2)$

(ii) सार्व पद द्विपद हो (Binomial is common)

उदाहरण:

1. $5a(2x-3y) + 2b(2x-3y)$ **का गुणनखण्ड है।**

व्याख्या:-

$5a(2x-3y) + 2b(2x-3y)$

सार्वपद $(2x-3y)$

$5a(2x-3y) + 2b(2x-3y)$

$= (2x-3y)(5a+2b)$

2. $8(4x+5y)^2 - 12(4x+5y)$ **का गुणनखण्ड है।**

व्याख्या:-

सार्व पद $4(4x+5y)$

$8(4x+5y)^2 - 12(4x+5y)$

$4(4x+5y)[2(4x+5y) - 3]$

$4(4x+5y)(8x+10y-3)$

2. पदो के पूनः समुहन द्वारा गुणनखण्डन –

- यदि सभी पदों में कोई पद सार्व नहीं हो तो दो-दो (अथवा तीन-तीन) पदो का समुहन इस प्रकार करते है कि सभी समूहों में सार्व गुणनखण्ड प्राप्त हो।

उदाहरण:

1. $a^2 + bc + ab + ac$ **का गुणनखण्ड है।**

व्याख्या:-

$= a^2 + ab + ac + bc$ (पूनः समुहन)

$= a(a+b) + c(a+b)$ (दो-दो के युग्म में सार्व)

$= (a+b)(a+c)$

2. $6ab - b^2 + 12ac - 2bc$ **का गुणनखण्ड है।**

व्याख्या:-

$6ab - b^2 + 12ac - 2bc$

$b(6a-b) + 2c(6a-b)$ (दो-दो के युग्म से सार्व)

$(6a-b)(b+2c)$

3. सर्वसमिकाओं के प्रयोग द्वारा गुणनखण्ड -

- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$
- $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
- $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$
- $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$
- $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

(I) मैट्रिक्स (आव्यूह) Matrix

परिभाषा-

- आव्यूह (मैट्रिक्स) एक आयताकार सारणी है, जिसमें वास्तविक या सम्मिश्र संख्याएं क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाओं द्वारा व्यवस्थित की जाती हैं.
- गणित में, **आव्यूह (Matrix)** संख्याओं, चिह्नों या चर राशियों की एक आयताकार व्यवस्था होती है, जिसे पंक्तियों (Rows) और स्तंभों (Columns) में व्यवस्थित किया जाता है। इसे कोष्ठकों (Brackets) के भीतर लिखा जाता है।
- एक m×n **आव्यूह A** एक ऐसी सारणी (Table) होती है, जिसमें m पंक्तियाँ और n स्तंभ होते हैं।
- इसे इस प्रकार लिखा जाता है:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

इतिहास-

- आव्यूह सिद्धान्त की खोज 1858 में आर्थर कैले ने की थी. यह सिद्धान्त गणित और विज्ञान में विभिन्न समस्याओं का समाधान करने में मदद करता है.

  जैसे- किसी स्कूल में छात्र संख्या का प्रदर्शन

कक्षा → वर्ग ↓	11 वीं	12 वीं
कला	40	37
वाणिज्य	30	28
विज्ञान	50	69

- इन आंकड़ों को क्रम बद्ध रूप से निम्न प्रकार व्यवस्थित किया जा सक्ता है।

$$\begin{bmatrix} 40 & 37 \\ 30 & 28 \\ 50 & 69 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

- इस व्यवस्था में प्रथम स्तम्भ कक्षा 11 के छात्र संख्या तथा द्वितीय सतम्भ कक्षा 12 की छात्र संख्या को प्रदर्शित करता है।
- इसी प्रकार प्रथम पंक्ति कला वर्ग में छात्र संख्या, द्वितीय पंक्ति वाणिज्य वर्ग तथा तृतीय पंक्ति विज्ञान वर्ग की छात्र संख्या को प्रदर्शित करती है।
- इसी प्रकार संख्याओं के आयताकार रूप व्यवस्था को आव्यूह कहते है।

- संख्याओं की क्षैतिज व्यवस्था पंक्ति और ऊध्वाधर व्यवस्था स्तम्भ कहलाती है, m पक्ति और n स्तम्भ युक्त मैट्रिक्स की कोटी $m \times n$ होती है।
- $A = [a_v]$ जहाँ $1 \le i \le m$ तथा $1 \le j \le n$

  a_{if} i वी पंक्ति तथा j वे स्तम्भ वाला अवयव है।

  i वीं पंक्ति के अवयव $a_{ip}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots a_{in}$

  j वीं स्तम्भ के अवयव $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \ldots \ldots \ldots \ldots .. a_{mj}$
- इस प्रकार i वीं पंक्ति तथा j वे स्तम्भ का अवयव $= a_{ij}$
- सामान्यतया मैट्रिक्स को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षर (Capital Letters) A, B, C, ...से सुचित किया जाता है। जबकि मैट्रिक्स के अवयव (या प्रविष्ठी) को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षर a, b, c, ... द्वारा स्थिति अनुसार अनुलग्न सहित प्रदर्शित किया जाता है।

  जैसे:-

  a_{11} = प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ का अवयव

  a_{12} = प्रथम पंक्ति तथा द्वितीय स्तम्भ का अवयव

  a_{13} = प्रथम पंत्ति तथा तृतीय स्तम्भ का अवयव अदि

  जैसे $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ हो तो

  $a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = 3,$

  $a_{21} = 4, a_{22} = 5, a_{23} = 6$

मैट्रिक्स के प्रकार (Type of matrices)

पंक्ति मैट्रिक्स –

- यदि किसी मैट्रिक्स में केवल एक पंक्ति (Row) हो और कई स्तंभ (Columns) हों, तो उसे पंक्ति मैट्रिक्स (Row Matrix) कहते हैं। या
- पंक्ति मैट्रिक्स एक प्रकार का आव्यूह है, जिसमें केवल एक ही पंक्ति होती है और स्तंभ एक से अधिक होते हैं.
- मैट्रिक्स $A = [a_{11}]_{m\times n}$ पंक्ति मैट्रिक्स कहलाता है
- जहाँ A केवल एक पंक्ति वाला मैट्रिक्स है और इसमें n स्तंभ होते हैं।

  उदाहरण:

  यदि $m = 1$

  $[a \quad b \quad c]_{1\times3}$
- पंक्ति मैट्रिक्स की कोटी ' $1 \times n$ ' रूप में होती है।

स्तम्भ मैट्रिक्स -

- स्तम्भ मैट्रिक्स एक प्रकार का आव्यूह है, जिसमें पंक्तियाँ एक से अधिक होती हैं और स्तंभ केवल एक ही होता है.
- मैट्रिक्स $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ सतम्भ मैट्रिक्स कहलाता है,

  उदाहरण:

  यदि $n = 1$

  $$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1}$$
- स्तम्भ मैट्रिक्स की कोटी " $m \times 1$ " के रूप में होती है।

आयताकार मैट्रिक्स -

– आयताकार मैट्रिक्स एक प्रकार का आव्यूह है, जिसमें पंक्तियों और स्तंभों की संख्या भिन्न-भिन्न होती है.

उदाहरण:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}_{2\times3} \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}_{3\times2}$$

– आयताकार मैट्रिक्स की विशेषता यह है कि इसकी पंक्तियों और स्तंभों की संख्या समान नहीं होती है.$m \neq n$

वर्ग मैट्रिक्स -

– वे आव्यूह जिनकी पंक्ति और स्तम्भ एक समान होते है वर्ग मैट्रिक्स कहलाती हैं।

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ वर्ग मैट्रिक्स कहलाता है यदि $m = n$

$$A = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}_b$$

$$\begin{bmatrix}4 & -3 & 2\\5 & 4 & 3\\8 & 9 & -4\end{bmatrix}_{3\times3}$$

विकर्ण मैट्रीक्स -

– विकर्ण मैट्रिक्स एक प्रकार का वर्ग मैट्रिक्स है, जिसमें विकर्ण (मुख्य तिर्यक) के अतिरिक्त अन्य सभी अवयव शून्य होते हैं वर्ग मैट्रीक्स $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ में $a_{ij} = 0$ जब $i \neq j$

$$= \begin{bmatrix}a & 0\\0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$\text{diag}(a_{11}a_{22}a_{33}) = \begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0\\0 & a_{22} & 0\\0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix}$$

– यह एक विकर्ण मैट्रिक्स है क्योंकि मुख्य विकर्ण के अलावा सभी तत्व 0 हैं।

त्रिभुजाकार मैट्रिक्स –

– त्रिभुजाकार मैट्रिक्स (Triangular Matrix) मैट्रिक्स का एक विशेष प्रकार है जिसमें या तो मुख्य विकर्ण (Principal Diagonal) के ऊपर या नीचे के तत्व शून्य (0) होते हैं।

– इसे दो प्रकारों में विभाजित किया जाता है:

1. ऊपरी त्रिभुजाकार मैट्रिक्स -

– यदि कोई वर्ग मैट्रिक्स (Square Matrix) में मुख्य विकर्ण के नीचे के सभी तत्व शून्य (0) हों, तो इसे ऊपरी त्रिभुजाकार मैट्रिक्स कहते हैं।

– एक वर्ग मैट्रिक्स $A = [a_{ij}]_{men}$ ऊपरि त्रिभुजाकार मैट्रिक्स कहलाता है। यदि $a_{ij} = 0$ जब $i > j$

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\0 & p & q\\0 & 0 & g\end{bmatrix}$$

2. निचला त्रिभुजाकार मैट्रिक्स -

– यदि किसी वर्ग मैट्रिक्स में मुख्य विकर्ण के ऊपर के सभी तत्व शून्य (0) हों, तो इसे निचला त्रिभुजाकार मैट्रिक्स कहते हैं।

– एक वर्ग मैट्रिक्स $A = [a_{ij}]_{m=n}$ निम्न त्रिभुजाकार मैट्रिक्स कहलाता है। यदि $a_{ij} = 0$ जब $i < j$

$$\begin{bmatrix}x & 0 & 0\\p & q & 0\\a & b & c\end{bmatrix}$$

अदिश मैट्रिक्स -

– वे वर्ग मैट्रिक्स जिनके विकर्ण के अतिरिक अन्य सभी अवयव शून्य होते हैं तथा विकर्ण के सभी अवयव एक समान होते है अदिश मैट्रिक्स कहलाता है।

$a_{ij} = 0 \quad i \neq j$

$a_{ij} = a \quad i = j$

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

Note-

सभी अदिश मैट्रिक्स विकर्ण मैट्रिक्स होते है किन्तु विकर्ण मैट्रिक्स का अदिश मैट्रिक्स होना आवश्यक नहीं है।

इकाई या तत्समक मैट्रिक्स -

– वे वर्ग मैट्रिक्स जिनके विकर्ण में इकाई अवयव तथा अन्य सभी अवयव शून्य हों तो वह इकाई मैट्रिक्स होती है।

$a_{ij} = 0$

$a_{ij} = 1$

$$I_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

एकल मैट्रिक्स –

– यदि कोई मैट्रिक्स केवल एक तत्व (Single Element) से मिलकर बना हो, तो उसे एकल मैट्रिक्स (Singleton Matrix) कहा जाता है। इसे 1×1 मैट्रिक्स के रूप में लिखा जाता है।

– एकल मैट्रिक्स या एकल तत्व मैट्रिक्स एक प्रकार का मैट्रिक्स है, जिसमें केवल एक ही तत्व होता है।

उदाहरण:

यदि $m = 1, n = 1$ अर्थात केवल एक अवयव वाला मैट्रिक्स

[a], [3], [0]

शून्य मैट्रिक्स –

– यदि किसी मैट्रिक्स के सभी तत्व शून्य (0) हों, तो उसे शून्य मैट्रिक्स (Zero Matrix) या रिक्त मैट्रिक्स (Null Matrix) कहते हैं। या

– शून्य मैट्रिक्स एक प्रकार का मैट्रिक्स है, जिसमें सभी अवयव शून्य होते हैं.

उदाहरण:

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}_{2\times2} \quad \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}$$

मैट्रिक्स पर संक्रियाएँ

दो मैट्रिक्स की तुल्यता (समान मैट्रिक्स)

- यदि दो मैट्रिक्स का आकार (Order) समान हो और उनके सभी संगत (Corresponding) तत्व समान हों, तो वे तुल्य (Equal) मैट्रिक्स कहलाते हैं।
- दो मैट्रिक्स $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ समान कोटी के मैट्रिक्स हो तो दो मैट्रिक्स तुल्य (समान) मैट्रिक्स होगे यदि दोनो के संगत अवयव समान हो- $\boldsymbol{a_{ij} = b_{ij}}$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

- यदि $A = B$ हो तो

  $a_1 = 2, b_1 = 3, a_2 = 5, b_2 = 4, a_3 = 7, b_3 = 6$

दो मैट्रिक्स का योग अथवा व्यवकलन

- यदि $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ दो समान कोटी के मैट्रिक्स हो तो इनका योग अथवा व्यवकलन A के अवयवों में B के संगत अवयवों को जोड़ने या घटाने पर प्राप्त होता है।

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \text{ हो तो}$$

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm & b_{22} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm & b_{32} \end{bmatrix}$$

Note –

(i) समान क्रम के मैट्रिक्सों को ही जोड़ा या घटाया जा सकता है:

- यदि दो मैट्रिक्स के क्रम समान नहीं हैं, तो उन्हें जोड़ा या घटाया नहीं जा सकता है।
- समान क्रम के मैट्रिक्सों को जोड़ने या घटाने के लिए, उनके संगत अवयवों को जोड़ा या घटाया जाता है।

(ii) विकर्ण मैट्रिक्स:

- विकर्ण मैट्रिक्स निम्न त्रिभुजीय अव्यूह होते हैं।
- विकर्ण मैट्रिक्स उपरि त्रिभुजीय अव्यूह भी होते हैं।
- विकर्ण मैट्रिक्स के अवयवों में से केवल विकर्ण अवयव ही गैर-शून्य होते हैं।

(iii) मैट्रिक्स अन्तर (A-B):

- मैट्रिक्स अन्तर (A-B) क्रम विनिमेयता का पालन नहीं करता है।
- मैट्रिक्स अन्तर (A-B) साहर्चयता का पालन नहीं करता है।
- मैट्रिक्स अन्तर (A-B) का परिणाम एक नया मैट्रिक्स होता है, जो मूल मैट्रिक्स A और B के अवयवों के अन्तर के आधार पर बनता है।

मैट्रिक्स योग के गुणधर्म-

(i) क्रम विनिमेयता -

- यदि A और B दो समान कोटी के मैट्रिक्स हो तो

  $A + B = B + A$

(ii) साहचर्यता -

- यदि A, B तथा C समान कोटी में मैट्रिक्स होती है।

  $A + (B + C) = (A + B) + C$

(iii) योज्य तत्समक मैट्रिक्स -

- यदि O, A के समान कोटी का शून्य मैट्रिक्स हो तो

  $A + O = O + A = A$
- जहाँ शून्य मैट्रिक्स O योज्य तत्समक मैट्रिक्स कहलाता है।

(iv) योज्य प्रतिलोम मैट्रिक्स -

- मैट्रिक्स $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ तो A का योज्य प्रतिलोम मैट्रिक्स $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$ होता है ताकि

  $A + (-A) = (-A) + A = O_{m\times n}$

(v) निरसन नियम -

- A, B, C तीन समान कोटी के मैट्रिक्स इस प्रकार हों

  $A + B = A + C \Rightarrow B = C$ (वाम निरसन नियम)

  $A + B = C + B \Rightarrow A = C$ (दक्षिण निरसन नियम)

मैट्रिक्स का अदिश गुणन

- जब किसी मैट्रिक्स के प्रत्येक तत्व को किसी अदिश (Scalar) संख्या से गुणा किया जाता है, तो उसे मैट्रिक्स का अदिश गुणन (Scalar Multiplication of a Matrix) कहते हैं।
- यदि $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ तथा k कोई अदिश राशि हो तो A का अदिश k से गुणन $kA = [ka_{ij}]_{m\times n} (k \neq 0)$ अर्थात् मैट्रिक्स का प्रत्येक अवयव k गुना हो जाता है।

अदिश गुणन के गुणधर्म -

- यदि $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B = [a_{ii}]_{m\times n}$ दो समान कोटी के मैट्रिक्स हो तो

1. $k(A + B) = k\,A + k\,B = [ka_{ij} + kb_{ij}]_{m\times n}$
2. $(k + p)A = k\,A + p\,A = [ka_{ij} + pa_{ij}]_{m\times n}$
3. $k(p\,A) = (kp)A = p(k\,A) = [kpa_{ij}]_{m\times n}$
4. $(-k)A = -(k\,A) = k(-A) = [-ka_{1j}]_{m\times n}$
5. $A = A$
6. $1.A = A$
7. $-A = -A$
8. A = O जहाँ O शून्य मैट्रिक्स है।

दो मिट्रिक्स का गुणन (Product of two matrix)

- दो मैट्रिक्स A तथा B का गुणन AB केवल तभी परिभाषित होगा जब प्रथम मैट्रिक्स A के स्तम्भों की संख्या द्वितीय मैट्रिक्स B के पंक्तियों की संख्या के बराबर हो।
- यदि $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B = [b_{jk}]_{m\times p}$ हो तो

  $AB = [\Sigma a_{ir} \times b_{rj}]_{m\times p}$ होगा-

  अर्थात्

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

तथा

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_p \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \cdots & \cdots \\ \dots & \dots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_q \end{bmatrix}_{n\times p}$$

हो तो

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_p \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \cdots & \cdots \\ \dots & \dots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_q \end{bmatrix}_{n\times p}$$

जहाँ $C_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj} = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}]\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ - \\ b_{nj} \end{bmatrix}$

महत्वपूर्ण बिन्दु :

- गुणनफल AB तभी परिभाषित है जब A में स्तम्भों की संख्या B, में पंक्तियों की संख्या के बराबर है।
- यदि गुणनफल AB सम्भव है तो यह आवश्यक नहीं है कि गुणनफल BA भी सम्भव हो।
- यदि $A, m\times n$ क्रम का आव्यूह तथा $B, n\times p$ क्रम का आव्यूह है तो $AB, m\times p$ क्रम का आव्यूह होगा।

  A : $m \times n$

  B : $n \times p$

  AB : $m \times p$
- AB गुणनफल में, A को पूर्व खण्ड तथा B को उत्तर खण्ड कहते हैं।
- BA गुणनफल में, B को पूर्वखण्ड तथा A को उत्तर खण्ड कहते हैं।
- गुणनफल आव्यूह की i वीं पंक्ति तथा k वें स्तम्भ का अवयव यह है $a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots .. + a_{in}b_{nk}$

  $= [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}]\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ - \\ b_{nk} \end{bmatrix}$

  A की i वीं पंक्ति के अवयव हैं : $a_{in}a_{i2}a_3 \dots \dots a_{in}$

  B की k वीं पंक्ति के अवयव हैं : $b_{1k}b_{2k}b_{3k} \dots \dots . b_{nk}$

  AB की वीं पंक्ति तथा k वें स्तम्भ का अवयव है :

  $a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots .. + a_{in}b_{nk}$

  इस प्रकार से AB की i वीं पंक्ति तथा k वें स्तम्भ के अवयवों को लिखने के लिए A की l वीं पंक्ति तथा B की k वीं स्तम्भ के संगत अवयवों को गुणा करके उनका योग करते हैं।
- यदि AB तथा BA दोनों परिभाषित हों तो उस दशा में भी AB का BA के बराबर होना आवश्यक नहीं है।
- यदि $A, m\times n$ क्रम का आव्यूह है तथा AB व BA दोनों परिभाषित हैं तो $B, n\times m$ क्रम का आव्यूह होगा।
- दोनों AB तथा BA एक ही क्रम के वर्ग आव्यूह द्वारा परिभाषित होना आवश्यक नहीं।
- **यदि दो भिन्न-भिन्न मैट्रिक्स A और B के लिए $A + B$ और AB परिभाषित हो तो A और B समान क्रम की वर्ग मैट्रिक्स होगी-**

(1) क्रमविनिमेयता -

- मैट्रिक्स गुणन सदैव क्रम विनिमय नियम का पालन करे। यह आवश्यक नहीं $AB \neq B\dot{B}$

(2) साहचर्यता -

- $A(BC) = (AB)C$

(3) तत्समक मैट्रिक्स –

- यदि $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ हो तो $I_m A = A = AI_n$

(4) बंटनता -

- मैट्रिक्स गुणा, मैट्रिक्स के योग को वितरित करता है। अर्थात तीन मैट्रिक्स A, B, C इस प्रकार हों ताकि AB, AC तथा BC परिभाषित हो तो-

  $A(B + C) = AB + AC$ (वाम बंटन नियम)

  $(A + B)C = AC + BC$ (दक्षिण बंटन नियम)

(5) शून्य मैट्रिक्स गुणन –

- $A.O = O.A = O$

Note –

(i) यदि $AB = O$ हो तो यह सदैव आवश्यक नहीं कि A तथा B में से कोई एक शून्य मैट्रिक्स हो।

उदाहरण:- माना $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

तब $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$

यहाँ $AB = O$ (शून्य आव्यूह) परन्तु न तो A और न B शून्य आव्यूह है।

(ii) यदि AB = O हो तो यह आवश्यक नहीं BA = O

(6) निरसन नियम -

– मैट्रिक्स गुणन निरसन नियम का पालन करे यह सदैव आवश्यक नहीं है अर्थात् AB = AC हो तो यह सदैव आवश्यक नहीं कि B = C

(7) विकर्ण मैट्रिक्स का गुणन -

– दो विकर्ण मैट्रिक्स का गुणन पुनः विकर्ण मैट्रिक्स ही होता है अर्थात् यदि

$$A=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&0&z\end{bmatrix}$$

हो तो $AB=\begin{bmatrix}ax&0&0\\o&by&0\\o&o&cz\end{bmatrix}$

(8) दो त्रिभुजाँक मैट्रिक्स का गुणन पुनः त्रिभुजाँक मैट्रिक्स होता है।

वर्ग मैट्रिक्स की धनात्मक पूर्णांक घातें-

– यदि A एक वर्ग मैट्रिक्स (Square Matrix) है, अर्थात् A का क्रम (Order) n×n है, तो इसकी धनात्मक पूर्णांक घातें (Positive Integer Powers) को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

– **A.A.A....... n बार = A^n** (केवल वर्ग में मैट्रिक्स के लिए)

(a) $A^1 = A$

(b) $(A^m)^n = (A^n)^m = A^{mn}$

(c) $I^m = I \quad \forall m \in N$

(d) $A^{n+1} = A^n \cdot A = A \cdot A^n \quad \forall n \in N$

(e) $A^{\circ} = I_n$

(f) $A^m \cdot A^n = A^n \cdot A^m = A^{m+n}$

(g) यदि AB = BA हो तो $(A+B)^m = \sum_{r=0}^{m} {}^mC_r A^{m-r} B^r$

जैसे- यदि $AB = BA$ हो तो

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

(h) यदि A तथा B समान कोटी के वर्ग मैट्रिक्स हो तो-

(i) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

(ii) $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$

(iii) $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

(iv) $(-A)\cdot B = A\cdot(-B) = -(AB)$

(v) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ सदैव सत्य होना आवश्यक नहीं

(vi) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ सदैव सत्य होना आवश्यक नहीं

(vii) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ सदैव सत्य होना आवश्यक नहीं

(viii) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ केवल तभी सत्य होगा जबकि $AB = BA$

(ix) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ केवल तभी सत्य होगा जबकि $AB = BA$

(x) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ केवल तभी सत्य होगा जबकि $AB = BA$

परिवर्त मैट्रिक्स

– परिवर्त मैट्रिक्स एक मैट्रिक्स है जो किसी मूल मैट्रिक्स की पंक्तियों और स्तंभों को आपस में बदलकर प्राप्त किया जाता है।

$A = [a_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A^T = [a_{ji}]_{nm}$

$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\p&q&r\end{bmatrix}_{2\times3}$ हो तो A का परिवर्त मैट्रिक्स

$A^T=\begin{bmatrix}a&p\\b&q\\c&r\end{bmatrix}_{3\times2}$

परिवर्त मैट्रिक्स की विशेषताएं:

- परिवर्त मैट्रिक्स की पंक्तियों की संख्या मूल मैट्रिक्स के स्तंभों की संख्या के बराबर होती है।
- परिवर्त मैट्रिक्स के स्तंभों की संख्या मूल मैट्रिक्स की पंक्तियों की संख्या के बराबर होती है।

परिवर्त मैट्रिक्स के गुणधर्म –

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(kA)^T = kA^T$

(iii) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

(v) $(ABCD)^T = D^T C^T B^T A^T$

सममित मैट्रिक्स -

– यदि $A = A^T$ हो तो A को सममित मैट्रिक्स कहते है। जैसे

$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix} = A^T$ अर्थात् $a_{ij} = a_{ji}$

विषम सममित मैट्रिक्स (Skew symmetric matrix)-

– यदि $A^T = -A$ हो तो A को विषम सममित मैट्रिक्स कहते है। जैसे

$$A=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-2&0&5\\3&-5&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}0&-2&3\\2&0&-5\\-3&5&0\end{bmatrix} = -A$$

अर्थात् $a_{ji} = \begin{cases}-a_{ij} & \text{यदि } i \neq j\\ 0 & \text{यदि } i = j\end{cases}$

सममित एवं विषम सममित मैट्रिक्स के गुणधर्म -

– प्रत्येक इकाई मैट्रिक्स सममित मैट्रिक्स होता है।

– शून्य मैट्रिक्स सममित तथा विषम सममित दोनों प्रकार का मैट्रिक्स होता है।

– कोई वर्ग मैट्रिक्स A सममित मैट्रिक्स हों तो

(i) $A + A^T, AA^T$ तथा A^TA भी सममित मैट्रिक्स होते है।

(ii) $A - A^T$ विषम सममित मैट्रिक्स होगा।

(iii) A^T, A^{-1}, A^n सममित मैट्रिक्स होगे। $n \in N$

(iv) $k\,A$ सममित मैट्रिक्स होगा। जहाँ k अचर

(v) B^TAB को सममित मैट्रिक्स होगा जब B, A के समान कोटी का वर्ग मैट्रिक्स है।

– यदि A एक साधारण वर्ग मैट्रिक्स हों तो

(i) $A + A^T, AA^T$ तथा A^TA सममित मैट्रिक्स

(ii) $A - A^T$ विषम सममित मैट्रिक्स

– यदि A और B समान कोटी के दो वर्ग सममित मैट्रिक्स हों तो

(i) $A \pm B, AB + BA$ भी सममित मैट्रिक्स होगा।

(ii) AB सममित होगा यदि $AB = BA$

(iii) $(AB - BA)$ विषम सममित मैट्रिक्स होगा

– विषम सममित आव्यूह के विकर्ण के सभी अवयव शून्य होते हैं।

– एक आव्यूह जो सममित तथा विषम सममित दोनों है वह शून्य आव्यूह है।

– A एक विषम सममित मैट्रिक्स हों तो

(i) $A^{2n}\ \forall n \in N$ सममित मैट्रिक्स होगा।

(ii) $A^{2n+1}\ \forall n \in N$ और A^T भी विषम सममित मैट्रिक्स

(iii) B^TAB भी विषम सममित मैट्रिक्स होगा

– यदि A एक n कोटी का विषम सममित मैट्रिक्स हो तो इसमे विभिन्न अधिकतम अशुन्य संख्याएँ $= n^2 - n$

– यदि A एक n एक कोटी का सममित मैट्रिक्स हो तो इसमें विभिन्न अधिकतम संख्याएँ $= \frac{n(n+1)}{2}$

– प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स को सममित तथा विषम सममित मैट्रिक्स के रूप में अद्वितीय रूप से लिखा जा सकता है।

$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$

जहाँ $A + A^T$ सममित मैट्रिक्स,

$A - A^T$ विषम सममित मैट्रिक्स

– सममित आव्यूह की सभी धनात्मक पूर्ण घातें सममित हैं।

हर्मिटीय और विषम हर्मिटीय मैट्रिक्स -

– एक वर्ग मैट्रिक्स $A = [a_{ij}]$ हर्मिटीय मैट्रिक्स कहलाता है। यदि और केवल यदि $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ $\forall a_{ij} \in A$

जैसे- $A = \begin{bmatrix} 5 & 4-3i \\ 4+3i & 6 \end{bmatrix}$ एक हर्मिटीय मैट्रिक्स है।

एक वर्ग मैट्रिक्स $A = [a_{ij}]$ विषम हर्मिटीय मैट्रिक्स कहलाता है। यदि और केवल यदि $a_{ij} = \vec{a}_{\mu}\ \forall a_{ij} \in A$

जैसे- $A = \begin{bmatrix} 3i & 4+2i \\ -4+2i & 0 \end{bmatrix}$ एक विषम हर्मिटीय मैट्रिक्स है

Note: -

(i) हर्मिटीय मैट्रिक्स के विकर्ण का प्रत्येक अवयव सदैव वास्तविक संख्या होगा।

(ii) विषम हर्मिटीय मैट्रिक्स के विकर्ण का प्रत्येक अवयव सदैव शुद्ध काल्पनिक राशि अथवा शून्य होगा।

(iii) A एक हर्मिटीय मैट्रिक्स होगा यदि और केवल यदि $A^{\ominus} = A$

(iv) A एक विषम हर्मिटीय मैट्रिक्स होगा यदि और केवल यदि $A^{\ominus} = -A$

(v) $A + A^{\ominus}$ सदैव हर्मिटीय मैट्रिक्स होता है।

(vi) $A - A^{\ominus}$ सदैव विषम हर्मिटीय मैट्रिक्स होता है।

लम्बकोणिक मैट्रिक्स -

– किसी वर्ग मैट्रिक्स का परिवर्त मैट्रिक्स A^T इसके प्रतिलोम मैट्रिक्स A^{-1} के बराबर हो तो इसे लम्ब मैट्रिक्स कहते है।

– यदि वर्ग मैट्रिक्स A और इसके परिवर्त मैट्रिक्स A^T का गुणनफल इकाई मैट्रिक्स हो तो A समकोणिक मैट्रिक्स, (अथवा लम्ब मैट्रिक्स) कहलाता है।

– एक वर्ग मैट्रिक्स A लम्बकोणिक मैट्रिक्स कहलाता है यदि $A^T = I = A^TA$ अथवा $A^T = A^{-1}$

Note:-

प्रत्येक लाम्बिक मैट्रिक्स व्युत्क्रमणिय होता है किन्तु प्रत्येक व्युत्क्रमणिय मैट्रिक्स का लाम्बिक होना आवश्यक नहीं है ।

मैट्रिक्स की ट्रेस

– किसी वर्ग मैट्रिक्स $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ के मुख्य विकर्ण के अवयवों का योग मैट्रिक्स का ट्रेस कहलाती है।

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \ldots \ldots + a_{nn}$$

मैट्रिक्स ट्रेस के गुणधर्म –

(i) $\text{tr}(kA) = k\,\text{tr}(A)$

(ii) $\text{tr}(A \pm B) = \text{tr}(A) \pm \text{tr}(B)$

(iii) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

(iv) $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$

मैट्रिक्स पर प्रारम्भिक संक्रिया (मैट्रिक्स रूपान्तरण) -

– मैट्रिक्स पर प्रारम्भिक रूपान्तरण वे संक्रियाएँ हैं जो मैट्रिक्स की पंक्तियों या स्तंभों पर की जाती हैं। ये रूपान्तरण मैट्रिक्स की संरचना को बदलते हैं, लेकिन इसके मूल्यों को नहीं बदलते हैं।

– मैट्रिक्स पर होने वाले प्रारम्भिक रूपान्तरण निम्नलिखित हैं।

(i) दो पंक्तियों (या स्तम्भों) का विनिमेय: -

– जब i वी पंक्ति (या स्तम्भ) को j वी पंक्ति (या स्तम्भ) से विनिमेय किया जाता है, तो इसमें $(R_i \leftrightarrow R_j)$ या $(C_i \leftrightarrow C_j)$ से निरूपित किया जाता है।

(ii) पंक्ति (या स्तम्भों) के अवयवों को अशून्य चर से गुणा :-

– किसी i वी पंक्ति (अथवा स्तंम्भ) के अवयवों को अशून्य संख्या k से गुणा किया जाता है तो इसे $R_i \rightarrow kR_i$ (अथवा $C_i \rightarrow kC_i$) से निरूपित किया जाता है।

(iii) पंक्ति (या स्तम्भ) के अवयवों को अन्य पंक्ति (या स्तम्भ) के साथ जोड़ना (या घटाना):-

– किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के अवयवों को अशुन्य अचर से गुणा करके अन्य पंक्ति (या स्तम्भ)के संगत अवयवों में जोड़ना।

$R_i \rightarrow R_i + kR$ या $C_i \rightarrow C_i + kC_j$

तुल्य आव्युह (Equivalent matrix)-

– समान क्रम के दो मैट्रिक्स को तुल्य मैट्रिक्स कहते है यदि प्रारम्भिक संक्रियाओं द्वारा एक मैट्रिक्स से दूसरा मैट्रिक्स प्राप्त होता है।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 8 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (R_2 \leftrightarrow R_3)$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5k & 8k & 3k \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (R_2 \leftrightarrow kR_2)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4k+5 & 3k+8 & 2k+3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (R_2 \leftrightarrow R_2 + k_3)$$

मैट्रिक्स का संयुग्मी –

– मैट्रिक्स A का संयुग्मी मैट्रिक्स $\bar{A}$, एक ऐसा मैट्रिक्स होता है जिसमें मैट्रिक्स A के प्रत्येक अवयव को उसके संगत संयुग्मी सम्मिश्र संख्याओं से प्रतिस्थापित किया जाता है।

यदि $A = \begin{bmatrix} 1-3i & 3 & -2+5i \\ 3+4i & -7-9i & 0 \end{bmatrix}$ हो तो A का संयुग्मी मैट्रिक्स

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1+3i & 3 & -2-5i \\ 3-4i & -7+9i & 0 \end{bmatrix}$$

Note:-
यदि मैट्रिक्स A के सभी अवयव वास्तविक संख्याऐं हैं तो $\bar{A} = A$

संयुग्मी मैट्रिक्स के गुणधर्म –

– यदि A और B उपयुक्त कोटि की मैट्रिक्स हो तथा $\overline{A}$ और $\overline{B}$ इनके संयुग्मी मैट्रिक्स हों तो

(i) $\overline{(\bar{A})} = A$

(ii) $\overline{(A \pm B)} = \overline{A} \pm \overline{B}$

(iii) $\overline{(kA)} = \bar{k}\,\overline{A}$ जहाँ k एक सम्मिश्र अदिश राशि हो।

(iv) $\overline{(AB)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

संयुग्मी परिवर्त मैट्रिक्स -

– मैट्रिक्स A के संयुग्मी मैट्रिक्स $\overline{A}$ का परिवर्त मैट्रिक्स, संयुग्मी परिवर्त मैट्रिक्स कहलाता है।

$$A^{\ominus} = (\overline{A})^T = \left(\overline{A^T}\right)$$

जैसे $A = \begin{bmatrix} 3 & 1-2i & -4+2i \\ 7-i & -2 & 3-i \end{bmatrix}$ हो तो

$$A^{\ominus} = \begin{bmatrix} 3 & 7+i \\ 1+2i & -2 \\ -4-2i & 3+i \end{bmatrix}$$

संयुग्मी परिवर्त मैट्रिक्स के गुणधर्म-

– यदि मैट्रिक्स $A^{\ominus}$ और $B^{\ominus}$ उपयुक्त कोटि के मैट्रिक्स A तथा B के संयुग्मी परिवर्त मैट्रिक्स हों तो

(i) $(A^{\ominus})^{\ominus} = A$

(ii) $(A \pm B)^{\ominus} = A^{\ominus} \pm B^{\ominus}$

(iii) $(kA)^{\ominus} = \bar{k}A^{\ominus}$

(iv) $(AB)^{\ominus} = B^{\ominus}A^{\ominus}$

उदाहरण-

1. उन आव्यूहों की संख्या ज्ञात करो जिनके 12 अवयव हैं।

व्याख्या: -

12 अवयव वाले सम्भव मैट्रिक्स का क्रम

$12 \times 1, 6 \times 2, 4 \times 3, 3 \times 4, 2 \times 6, 1 \times 12$

कुल सम्भव संख्या $= 6$

2. वह आव्यूह ज्ञात करो जिसके लिए

$\boldsymbol{a_{ij} = 3i - 2j}$ $\quad \mathbf{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]_{3\times2}$

व्याख्या: -

$a_{11} = 3 - 2 = 1, a_{12} = 3 - 4 = -1,$

$a_{21} = 6 - 2 = 4, a_{22} = 6 - 4 = 2,$

$a_{31} = 9 - 2 = 7, a_{32} = 9 - 4 = 5$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

3. x, y का मान ज्ञात करो जबकि

$$\begin{bmatrix} x+5 & 2x+y \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ x-1 & 5 \end{bmatrix}$$

व्याख्या: -

$x + 5 = 10 \Rightarrow x = 5$

$2x + y = 12 \Rightarrow 10 + y = 12 \Rightarrow y = 2$

4. यदि $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $A + 2B = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ हो तो A =?

व्याख्या: -

$\because A = (A + 2B) - 2B$

$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8-10 & 5-4 \\ -3-8 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -11 & 1 \end{bmatrix}.$

5. यदि $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ हो तो X का मान ज्ञात करो।

व्याख्या: -

माना $X = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4a_1 + 2a_2 & 4b_1 + 2b_2 \\ -a_1 + a_2 & -b_1 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

अत: $\left.\begin{matrix} 4a_1 + 2a_2 = 6 \\ -a_1 + a_2 = 0 \end{matrix}\right\} a_1 = a_2 = 1$

$\left.\begin{matrix} 4b_1 + 2b_2 = 0 \\ -b_1 + b_2 = -6 \end{matrix}\right\} b_1 = 2, b_2 = -4,$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

(ii) सारणिक (Determinant)

- सारणिक एक वर्ग मैट्रिक्स के लिए परिभाषित एक संख्या होती है, जो मैट्रिक्स के अवयवों के आधार पर गणना की जाती है। सारणिक को प्रायः |A|, सारणिक A, या detA से प्रदर्शित किया जाता है।
- सारणिक की गणना करने के लिए, मैट्रिक्स के अवयवों को एक विशिष्ट तरीके से जोड़ा और गुणा किया जाता है। सारणिक का मान मैट्रिक्स के रैंक, विकर्ण अवयवों और अन्य गुणधर्मों पर निर्भर करता है।

सारणिक के कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्म हैं -

- सारणिक का मान शून्य होता है यदि मैट्रिक्स का रैंक पूर्ण नहीं होता है।
- सारणिक का मान एक होता है यदि मैट्रिक्स एक इकाई मैट्रिक्स होता है।
- सारणिक का मान बदलता है यदि मैट्रिक्स के अवयवों में परिवर्तन किया जाता है।

एक कोटि के वर्ग आव्यूह का सारणिक-

$|[a_{11}]| = a_{11}$ अर्थात् यदि $\mathrm{A} = [a_{11}]$, तब $|\mathrm{A}| = a_{11}$

उदाहरण : यदि $\mathrm{A} = [-2]$, तब $|\mathrm{A}| = -2$

द्वितीय कोटि के वर्ग आव्यूह का सारणिक-

द्वितीय कोटि के वर्ग आव्यूह $\mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ का सारणिक इस प्रकार परिभाषित है : $|\mathrm{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

इस प्रकार से $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

उदाहरण: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 4 \times 2 = -3$

उपसारणिक -

- सारणिक |A| के अवयव a_{ij} के संगत उपसारणिक M_{ij} दिये गये सारणिक से i वी पंक्ति तथा j वे स्तम्भ को हटाने पर प्राप्त सारणिक होता है।

उदाहरण:

सारणिक $\mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ के लिए a_{11} के संगत उपसारणिक $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

a_{12} के संगत उपसारणिक $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

सहखण्ड -

- सहखण्ड एक सारणिक के अवयव के संगत एक मान होता है, जो उस अवयव के संगत उपसारणिक के सारणिक के चिह्न के आधार पर निर्धारित होता है।
- M_{ij} उपसारणिक को $(-1)^{i+j}$ से गुणा किया जाय तो यह अवयव a_{ij} का सहखण्ड् कहलाता है।

किसी सारणिक के अवयव a_{ij} के संगत सहखण्ड

$\mathrm{C}_{ij} = (-1)^{i+j}\mathrm{M}_{ij}$

$$C_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \text{यदि } (i+j) \text{ सम राशि हो} \\ -M_{ij} & \text{यदि } (i+j) \text{ विषम राशि हो} \end{cases}$$

$\mathrm{C}_{11} = \mathrm{M}_{11}, \ \mathrm{C}_{12} = -\mathrm{M}_{12}, \quad \mathrm{C}_{13} = \mathrm{M}_{13}$

यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ एक वर्ग मैट्रिक्स हो तो

मैट्रिक्स A का सारणिक

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$|\mathrm{A}| = a_{11}\mathrm{C}_{11} + a_{12}\mathrm{C}_{12} + a_{13}\mathrm{C}_{13}$

जहाँ C_{11} = अवयव a_{11} का सहखण्ड = a_{11} के सगंत पंक्ति तथा स्तम्भ को हटाने के पश्चात् शेष सारणिक

$= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$

इसी प्रकार

$C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$

तथा $C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$

तृतीय कोटी के आव्यूह का सारणिक -

- यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ एक वर्ग मैट्रिक्स हो तो

मैट्रिक्स A का सारणिक

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$|\mathrm{A}| = a_{11}\mathrm{C}_{11} + a_{12}\mathrm{C}_{12} + a_{13}\mathrm{C}_{13}$

जहाँ C_{11} = अवयव a_{11} का सहखण्ड

सरस चित्र (Sarrus diagram) की सहायता से-

- यदि $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ हो तो

$|\mathrm{A}| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$
$\quad -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{n})$

- तृतीय कोटि के सारणिक का प्रसार करने के 6 तरीके हैं। तीन पंक्तियों या तीन स्तम्भों में से किसी भी पंक्ति या स्तम्भ के अनुदिश इसका प्रसार किया जा सकता है।

(i) $|\mathrm{A}| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$ [प्रथम पंक्ति के संगत प्रसार] अथवा

$|\mathrm{A}| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

(ii) $|\mathrm{A}| = -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23}$ [द्वितीय पाक्ति के संगत प्रसात]

अथवा

$|\mathrm{AI} = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$

(iii) $|A| = a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33}$ [तृतीय पंत्र के संगत प्रसार] अथवा
$|A| = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$

(iv) $|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}$ [प्रथम स्तम्भ के संगत प्रसार] अथवा
$|A| = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$

(v) $|A| = -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{23}$ [द्वितीय स्तम्भ के संगत प्रसार] अथवा
$|A| = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{23}$

(vi) $|A| = a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}$ [तृतीय स्तम्भ के संगत प्रसार] अथवा
$|A| = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}$

Note :-

1. केवल वर्ग आव्यूहों का ही सारणिक होता है: सारणिक की परिभाषा केवल वर्ग आव्यूहों (वर्ग मैट्रिक्स) के लिए होती है। अन्य प्रकार के मैट्रिक्स का सारणिक नहीं होता है।
2. सारणिक को आव्यूह का सारणिक कहते हैं: यदि A एक वर्ग आव्यूह है, तो |A| को आव्यूह A का सारणिक कहते हैं, न कि A का मापांक।
3. सारणिक का मान पंक्ति या स्तंभ के अनुदिश प्रसार करने पर नहीं बदलता: सारणिक का मान पंक्ति या स्तंभ के अनुदिश प्रसार करने पर नहीं बदलता है। यह सारणिक का एक महत्वपूर्ण गुणधर्म है।

सारणिक के गुणधर्म –

1. (i) $|kA| = k^n|A|$ जहाँ A, n कोटी का वर्ग मैट्रिक्स
(ii) $|A^m| = |A|^m$
(iii) $|AB| = |A||B| = |BA|$
(iv) यदि $A = \text{dia}(a_{11}a_{22} \dots a_{nn}), n$ कोटी का विकर्ण मैट्रिक्सि हो तो $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nm}$ (विकर्ण अवयवों का गुणनफल)

2. सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है जब उसकी पंक्तियों और स्तम्भों को आपस में बदल दिया जाता है।
$|A| = |A^T|$
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

3. यदि किसी सारणिक की दो पंक्तियाँ या दो स्तम्भ एक दूसरे के संगत समानुपाती हों, तो उस सारणिक का मान शून्य होता है।
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \end{vmatrix} = 0$$

4. सारणिक की दो पंक्तियों या दो स्तम्भों को आपस में बदलने से सारणिक का चिन्ह उलट जाता है, लेकिन उसका मान वही रहता है।
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_3 & a_2 & c_3 \\ b_2 & a_3 & c_2 \end{vmatrix}$$

5. यदि किसी सारणिक की एक पंक्ति या एक स्तम्भ के सभी अवयव शून्य होते हैं, तो उस सारणिक का मान शून्य होता है।
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

6. किसी सारणिक में दो पंक्तियाँ (या दो स्तम्भ) एक समान होने पर सारणिक का मान शून्य होता है।
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

7. सारणिक के किसी एक पंक्ति (या स्तम्भ) में उभयनिष गुणन खण्ड उपस्थित होने पर उसे बाहर निकाला जा सकता है।
$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} ka_1 & a_2 & a_3 \\ kb_1 & b_2 & b_3 \\ kc_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

8. किसी सारणिक की पंक्ति या स्तम्भ के अवयवों को दो भागों में विभाजित करने पर, उस सारणिक को दो अलग-अलग सारणिकों के योग के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।
$$\begin{vmatrix} a_1+x & a_2+y & a_3+z \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

9. किसी सारणिक की किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के अवयवों में दूसरी पंक्ति (या स्तम्भ) के संगत अवयवों के गुणज जोड़ा या घटाया जाय तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_2 & a_2 & a_3 \\ b_1+kb_2 & b_2 & b_3 \\ c_1+kc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

10. यदि सारणिक चर राशि x के पदों में है। तथा $x = a$ पर सारणिक का मान शून्य होता है $(x - a)$ तो सारणिक का एक गुणनखण्ड होगा।
जैसे $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ में $a = b$ रखने पर शून्य प्राप्त होता है $(a - b)$ इसका एक गुणन खण्ड होगा।

11. सारणिक की एक पंक्ति (या स्तम्भ) के अवयवों को किसी अन्य पंक्ति (या स्तम्भ) के संगत सहखण्ड से गुणा करके जोड़ने पर परिणाम शून्य होता है।
$a_{11}C_{21}+a_{12}C_{22}+a_{13}C_{23}=0$

सहखण्ड मैट्रिक्स (Adjoint matrix)

- सहखण्ड मैट्रिक्स एक मैट्रिक्स है जो किसी मैट्रिक्स के अवयवों को उनके संगत सहखण्ड से प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त मैट्रिक्स का परिवर्त मैट्रिक्स होता है।

$$\text{adj}A=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}^{T}$$

- जहाँ C_{11} अवयव a_{11} के संगत सहखण्ड

$$C_{11}=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})$$
$$C_{12}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=-(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})$$
$$C_{13}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$
$$C_{21}=-\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})$$
$$C_{22}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=(a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})$$
$$C_{23}=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=-(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})$$
$$C_{31}=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}=(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$$

सहखण्ड मैट्रिक्स के गुणधर्म -

- यदि $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ एक n कोटी का वर्ग मैट्रिक्स हो तो
- $\text{adj}(k\,A)=k^{n-1}(\text{adj}A)\ (k\neq 0)$
- $\text{adj}(\mathbf{A}^{T})=(\text{adj}(\mathbf{A}))^{T}$
- यदि $A=0$ हो तो $\text{adj}A=0$
- $\mathbf{A}\times\text{adj}(\mathbf{A})=\text{adj}(\mathbf{A})\times\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{I}_n$ जहाँ I_n, n कोटी का इकाई मैट्रिक्स
- सममित मैट्रिक्स का सहखण्ड़ज मैट्रिक्स भी सममित होता है।
- विकर्ण मैट्रिक्स का सहखण्ड़ज मैट्रिक्स भी विकर्ण मैट्रिक्स होता है।
- त्रिभुजाकार मैट्रिक्स का सहखण्ड़ज मैट्रिक्स त्रिभुजाकार होता है।
- $|A\text{adj}A|=|A|^{n}$
  $|A.\text{adj}\,A|=\||A|I_n|=|A|^{n}$
- $|\text{adj}(A)|=|A|^{n-1}$ यदि $|A|\neq 0$
  $|A\cdot adjA|=|A|^{n}\Rightarrow|A|ladjA|=|A|^{n}$
  $\Rightarrow|\text{adj}A|=|A|^{n-1}$
- $\text{adj}(I_n)=I_n$
- $\text{adj}(A^{m})=(\text{adj}A)^{m}\quad\forall m\in N$
- $|\text{adj}(\text{adj}A)|=|A|^{(n-1)^2}$
  $|\text{adj}(\text{adj}A)|=|\text{adj}AA^{n-1}|=|A|^{(n-1)(n-1)}=|A|^{(n-1)^2}$
- $\text{adj}(AB)=(\text{adj}A)(\text{adj}B)$
  जहाँ B, A के समान कोटी का वर्ग मैट्रिक्स है।
- $\text{adj}(\text{adj}A)=|A|^{n-2}\cdot A$
  $A^{-1}=\frac{\text{adj}A}{|A|}\Rightarrow\text{adj}(A)=|A|A^{-1}$
  $\Rightarrow\text{adj}(\text{adj}A)=\||A|A^{-1}|(|A|A^{-1})^{-1}$
  $=|A|^{n}\cdot|\,A|^{-1}|\cdot(A^{-1})^{-1}\cdot|A|^{-1}$
  $\Rightarrow\text{adj}(\text{adj}A)=|A|^{n-2}\cdot A$
- यदि $(\text{adj}A)=0$ हो तो A अव्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स अथवा A अव्युत्क्रमणिय मैट्रिक्स हो तो $(\text{adj}A)=O$

प्रतिलोम मैट्रिक्स/व्युत्क्रमणीय आव्यूह Inverse matrix

- n क्रम का वर्ग आव्यूह A व्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि n क्रम के ऐसे वर्ग आव्यूह B का अस्तित्व हो, कि
  $AB=BA=I_n$,
  जहाँ I_n, n क्रम का इकाई आव्यूह है।
- यदि B , आव्यूह A का प्रतिलोम है तो A आव्यूह B का प्रतिलोम है। इस प्रकार यदि $A^{-1}=B$, तब $B^{-1}=A$
- यदि $AB=BA=I$, तब A तथा B दोनों व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।
- वर्ग आव्यूह का प्रतिलोम, यदि इसका अस्तित्व है, अद्वितीय है।
- आव्यूह B को आव्यूह A का प्रतिलोम (व्युत्क्रम) आव्यूह कहते हैं तथा A^{-1} से प्रदर्शित करते हैं।
  यदि $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ n कोटी का वर्ग मैट्रिक्स हो तो
  $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj}(A),\ |A|\neq 0$
- $m\times n$ क्रम $(m\neq n)$ का आयताकार आव्यूह व्युत्क्रमणीय नहीं है चूँकि $AB=BA$ के लिए A तथा B समान क्रम के वर्ग आव्यूह होने चाहिए।

प्रतिलोम मैट्रिक्स के गुणधर्म -

- यदि A, n कोटी का व्यूत्क्रमणीय मैट्रिक्स हो तो

(1) $A\cdot A^{-1}=A^{-1}A=I_n$
(2) $(A^{-1})^{-1}=A$
(3) $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$
(4) $(A^{k})^{-1}=(A^{-1})^{k}$
(5) $(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ (उत्क्रमण नियम)
(6) $\text{adj}(A^{-1})=[\text{adj}(A)]^{-1}$
(7) यदि $|A|\neq 0$ हो तो $AB=AC\Rightarrow B=C$ (निरसन नियम)
(8) यदि $A=\text{diag}(abc)$ तो $A^{-1}=\text{diag}(a^{-1}b^{-1}c^{-1})$
(9) यदि A व्युक्कमणीय सममित आव्यूह है तब A^{-1} भी सममित है।
(10) विषम क्रम का प्रत्येक विषम सममित आव्यूह अव्युक्कमणीय है।
(11) $|A^{-1}|=|A|^{-1}$
(12) $|I_n|^{-1}=I_n$
(13) यदि $A=\text{diag}(a_1a_2a_3\ \ a_n)$ हो तो
$A^{-1}=\text{diag}(a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}\ldots.a^{-1}h$
(14) यदि A विकर्ण मैट्रिक्स हो तो A^{-1} भी विकर्ण मैट्रिक्स
(15) यदि A त्रिभुजाकार मैट्रिक्स हो तो A^{-1} भी त्रिभुजाकार मैट्रिक्स

विशेष मैट्रिक्स -

(a) यदि $A = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix}$ हो तो-

$A^n = \begin{bmatrix} \cosh n\theta & \sinh n\theta \\ \sinh n\theta & \cosh n\theta \end{bmatrix}$

(b) यदि $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ हो तो-

$A_\alpha^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$ तथा

$A_\alpha A_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$

(c) यदि $\mathrm{A} = \mathrm{diag}(a, b, c)$ हो तो-

$\mathrm{A}^n = \mathrm{diag}(a^n, b^n, c^n)$

(d) यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ हो तो-

$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = 2^{n-1}\,\mathrm{A}$

इसी प्रकार $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ हो तो $\mathrm{A}^n = 3^{\mathrm{n}-1}\,\mathrm{A}$

मैट्रिक्स तथा सारणिक के अनुप्रयोग
Applications of determinants and matrices

– किसी सारणिक की सहायता से रैखिक समीकरण निकाय का हल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित बातें ध्यान में रखनी चाहिए:

1. समीकरण निकाय का हल दो प्रकार का हो सकता है:

(i) **अवरोधी हल (Consistent solution):** इसमें हल का अस्तित्व होता है, जो अद्वितीय या अनन्त हो सकता है।

(ii) **विरोधी हल (Inconsistent solution):** इसमें हल का अस्तित्व नहीं होता है।

2. समघात समीकरण निकाय: इसमें समीकरण निकाय का हल सदैव अवरोधी होता है।

$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$

$a_2x + b_2y + c_2z = 0,$

$a_3x + b_3y + c_3z = 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(i) यदि. $\Delta \neq 0$ तो समघात समीकरण निकाय का अद्वितीय हल $x = y = z = 0$ होता है जिसे तुच्छ हल कहते है।

(ii) यदि $\Delta = 0$ तो समघात समीकरण निकाय के अनन्त हल होते है। जिसे अतुच्छ हल कहते है।

असमघात समीकरण निकाय-

(a) क्रेमर नियम (Cramer Rule)-

– क्रेमर नियम एक गणितीय तकनीक है जिसका उपयोग रैखिक समीकरणों के समरूप तंत्र (System of Linear Equations) को हल करने के लिए किया जाता है। यह नियम मुख्य रूप से **निर्धारक (Determinants)** की सहायता से समीकरणों का हल निकालने के लिए प्रयुक्त होता है।

– यदि किसी समरूप रैखिक समीकरण तंत्र (System of Linear Equations) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

हो तो रैखिक समीकरण निकाय का हल

$x = \frac{D_1}{D},\ y = \frac{D_2}{D},\ z = \frac{D_3}{D}$

जहाँ $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

– यदि $\mathrm{D} \neq 0$ तो रैखिक समीकरण निकाय संगत है तथा इसका अद्वितीय हल (Unique solution) प्राप्त होता हो।

– यदि $\mathrm{D} = 0$ तथा $\mathrm{D_1, D_2, D_3}$ में से प्रत्येक शून्य के बराबर हो तो निकाय के अनन्त हल (Infinite many solution) होंगे।

– यदि $\mathrm{D} = 0$ तथा $\mathrm{D_1, D_2, D_3}$ में से कम से कम कोई एक अशून्य हो तो निकाय असंगत होगा तथा इसका हल (No solution) प्राप्त नहीं किया जा सकता।

(b) मैट्रिक्स विधी (Matrix Method)

– मैट्रिक्स विधि रैखिक समीकरणों (System of Linear Equations) को हल करने की एक सरल और संगठित विधि है। इसमें समीकरणों को मैट्रिक्स रूप में व्यक्त करके हल निकाला जाता है। इस विधि का उपयोग गणित, इंजीनियरिंग और कंप्यूटर विज्ञान में बड़े पैमाने पर किया जाता है।

– यदि हमें निम्नलिखित रैखिक समीकरण तंत्र (System of Equations) दिया गया है:

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

अर्थात् समीकरण निकाय $AX = B$ हो तो समीकरण निकाय का व्याख्या: - $\mathrm{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

जहाँ $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$

समीकरण निकाय के गुणाँकों का मैट्रिक्स $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ चर

राशियों का मैट्रिक्स $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

– यदि $|\mathrm{A}| = 0$ तो निकाय संगत है तथा निकाय का अद्वितीय हल (Unique solution) $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{B}$ होगा।

– यदि $\mathrm{A}\ | = 0$ तथा $(\mathrm{adj}\mathrm{A}), \mathrm{B} \neq 0$ तो निकाय असंगत होगा तथा इसका हल सम्भव नहीं। (No solution)

– यदि $|A| = 0$ तथा $(\mathrm{adj}A) \cdot B = 0$ तो निकाय संगत है तथा निकाय के अनन्त हल (Infinite many solution) होंगे।

त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of Triangle)-

– यदि त्रिभुज के शीर्ष $(x_p y_1), (x_2, y_2)$ तथा $(x_3 y_3)$ हो तो

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

तीन बिन्दु के समरेख होने का प्रतिबन्ध

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

कुछ विशेष सारणिको के मान-

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)\,(b-c)\,(c-a)(a+b+c)$

(f) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(g) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$

(h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

(i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

(j) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

(k) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

(l) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}^{n}C_1 & {}^{(n+1)}C_1 & {}^{(n+2)}C_1 \\ {}^{n}C_2 & {}^{(n+1)}C_2 & {}^{(n+2)}C_2 \end{vmatrix} = 1$

(m) $\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix} = 0$

विशेष बिन्दु-

1. केवल समान क्रम के सारणिक का गुणन ही परिभाषित है यदि क्रम समान न हो तो पहले क्रम समान बनाते है।

जैसे :- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}$ अथवा $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2. प्रत्येक त्रिभुजाकार (उपरि अथवा निम्न) तथा विकर्ण सारणिक का मान उसके विकर्ण अवयवों के गुणन के बराबर होता है।

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = acf$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = adf,$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

3. विषम कोटी के विषम सममित सारणिक का मान शुन्य होता है-

$$\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & d \\ -c & -d & 0 \end{vmatrix} = 0$$

सम कोटी के विषम सममित सारणिक मान सदैव पूर्णवर्ग होता है।

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2$$

4. यदि सारणिक की प्रत्येक पंक्ति (अथवा स्तम्भ) के सभी पद समान घात के व्यंजक हो तो (x, y, z अथवा a, b, c में सममित पद) तो सारणिक के विस्तार करने पर प्राप्त व्यंजक की घात सारणिक के विर्कण अवयवों की घातों के तुल्य होगी।

जैसे $\begin{vmatrix} y+z & x & x \\ y & z+x & y \\ z & z & x+y \end{vmatrix}$ के प्रसार मे 3 घाती व्यंजक प्राप्त होगा।

5. यदि सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix}$ के रूप में x का फलन हो तो

सारणणिक का अवकलन $\Delta' = \begin{vmatrix} R_1' \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2' \\ R_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3{}' \end{vmatrix}$

अथवा

$\Delta = [C_1 \quad C_2 C_3]$ हो तो Δ का अवकलन

$\Delta' = [C_1' \quad C_2 \quad C_3] + [C_1 \quad C_2' \quad C_3] + [C_1 \quad C_2 C_3]$

उदाहरण-

1. $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{ca} & \boldsymbol{ab} \end{vmatrix}$ **का मान होगा।**

व्याख्या: -

$\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ abc & abc & abc \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \times abc \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)(c-a)$

2. $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a^3} & \boldsymbol{b^3} & \boldsymbol{c^3} \end{vmatrix}$ **का मान होगा।**

व्याख्या: -

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{matrix}$$

$$= (c-a)(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (c-a)(b-a)[(c^2+ca+a^2)-(b^2+ab+a^2)]$$

$$= (c-a)(b-a)[(c^2-b^2)+a(c-b)]$$

$$= (c-a)(b-a)(c-b)[(c+b+a)]$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

3. $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{b^2} & \boldsymbol{c^2} \end{vmatrix}$ **का मान होगा।**

व्याख्या: -

$$\mathrm{C}_2 \to \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1, \quad \mathrm{C}_3 \to \mathrm{C}_3 - \mathrm{C}_1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)[(c+a)-(b+a)]$$

$$= (b-a)(c-a)[(c+a)-(b+a)]$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

4. $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a-b} & \boldsymbol{b-c} & \boldsymbol{c-a} \\ \boldsymbol{b-c} & \boldsymbol{c-a} & \boldsymbol{a-b} \\ \boldsymbol{c-a} & \boldsymbol{a-b} & \boldsymbol{b-c} \end{vmatrix}$ **का मान होगा।**

व्याख्या: -

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0[\mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3]$$

5. $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{ca} & \boldsymbol{ab} \\ \boldsymbol{b+c} & \boldsymbol{c+a} & \boldsymbol{a+b} \end{vmatrix}$ **का मान होगा।**

व्याख्या: -

$$\mathrm{C}_2 \to \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_3 \to \mathrm{C}_3 - \mathrm{C}_1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \\ b+c & (a-b) & a-c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ bc & c & b \\ b+c & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

6. $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{b+c} & \boldsymbol{c+a} & \boldsymbol{a+b} \\ \boldsymbol{b^2+c^2} & \boldsymbol{c^2+a^2} & \boldsymbol{a^2+b^2} \end{vmatrix}$ **का मान होगा।**

व्याख्या: -

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ b^2+c^2 & a^2-b^2 & a^2-c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{matrix}$$

$$= (a-b)(a-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ b^2+c^2 & a+b & a+c \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c)[(a+c)-(a+b)]$$

$$= (a-b)(a-c)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

7. $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{b^2} & \boldsymbol{c^2} \\ \boldsymbol{b+c} & \boldsymbol{c+a} & \boldsymbol{a+b} \end{vmatrix}$ **का मान होगा।**

व्याख्या: -

$$R_3 \to R_3 + R_1$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & b+c+a & c+a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

8. $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{b^2} & \boldsymbol{c^2} \\ \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{ca} & \boldsymbol{ab} \end{vmatrix}$ **का मान होगा।**

व्याख्या: -

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ abc & abc & abc \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc} \times abc\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

अभ्यास प्रश्न

1. यदि A सममित मैट्रिक्स हो तो $\mathrm{B^TAB}$ होगा।

(a) सममित (b) विषम सममित

(c) हर्मिटीय (d) विषम हर्मीटीय **[a]**

2. A एक विषम हर्मिटीय मैट्रिक्स होगा यदि-

(a) $A^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$ (b) $\mathrm{A^T} = -\mathrm{A}$

(c) $A^{\mathrm{T}} = \bar{A}$ (d) $\mathrm{A^T} = -\overline{\mathrm{A}}$ **[d]**

3. वर्ग मैट्रिक्स A के लिए सत्य कथन है।

(a) $\mathrm{A(adjA)} = 0$ (b) $\mathrm{A(adjA)} = |\mathrm{A}|$

(c) $\mathrm{A(adjA)} = \mathrm{I}$ (d) $\mathrm{A(adjA)} = |\mathrm{A}|$ **[d]**

4. $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{2-3i} & \boldsymbol{4+5i} \\ \boldsymbol{2+3i} & \mathbf{4} & \boldsymbol{4+3i} \\ \boldsymbol{4-5i} & \boldsymbol{4-3i} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$ **मैट्रिक्स होगा।**

(a) सममित (b) विषम सममित

(c) हर्मिटीय (d) विषम हर्मीटीय **[c]**

5. यदि A और B समान कोटि के वर्ग मैट्रिक्स हों तो $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2$ बराबर होगा।

(a) A^2+B^2+2AB (b) $\mathrm{A^2+B^2+2BA}$

(c) $A^2+B^2+AB+BA$ (d) a और b दोनों **[c]**

6. मैट्रिक्स A शून्य मैट्रिक्स होगा यदि-

(a) $A = A^T$ (b) $A = -A^T$

(c) $A = -A$ (d) $A = \text{adj}A$ **[c]**

व्याख्या: -

$A = -A$

$\Rightarrow A + A = O$

$\Rightarrow 2A = O \Rightarrow A = O$

7. A एक ऐसी पंक्ति मैट्रिक्स है जिसमें $A = A^T$ तो A में अवयव की संख्या होगी।

(a) 1 (b) 2

(c) 4 (d) 3 **[a]**

8. x का मान ज्ञात करो यदि-

$x^2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + x\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) -2

(c) 1 (d) a, b, c तीनों **[c]**

व्याख्या: -

$x^2\binom{2}{1} + x\binom{-3}{1} = \binom{-1}{2}$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x = -1$

$\Rightarrow x = 1, \frac{1}{2}$

तथा $x^2 + x = 2$

$\Rightarrow x = 1, -2$

उभयनिष्ठ मान $x = 1$

9. यदि $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ हो तो $\text{adj}(\text{adj}A)$ का मान होगा।

(a) $|A|^2$ (b) A

(c) 2 A (d) A^2 **[b]**

व्याख्या: -

$\text{adj}(\text{adj}A) = |A|^{n-2}.A = A \qquad (\because |A| = 1)$

10. यदि $A = diag.(a, b, c)$ हो तो A^2 का मान होगा।

(a) diag (ab, bc, ca)

(b) diag $(a+b, b+c, c+a)$

(c) diag $(2a, 2b, 2c)$

(d) diag (a^2, b^2, c^2) **[d]**

व्याख्या: -

$A = \text{daig}(a \cdot b\ c)$

$\Rightarrow A^n = \text{daig}(a^n b^n c^n)$

$\Rightarrow A^2 = \text{daig}(a^2 b^2 c^2)$

11. यदि $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ हो तो $\text{tr}(A)$ का मान होगा।

(a) 2 (b) 56

(c) 3 (d) 12 **[a]**

व्याख्या: -

$\text{tr}(A)$ = मैट्रिक्स A के मुख्य विकर्ण के अवयवों का योग = 2

12. $A = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ मैट्रिक्स होगा।

(a) सममित (b) विषम सममित

(c) लम्बकोणिय (d) इनमें से कोई नहीं **[c]**

व्याख्या: -

A सममित मैट्रिक्स होगा यदि $A^T = A$

A विषम सममित मैट्रिक्स होगा यदि $A^T = -A$

A लम्बंकोणीय मैट्रिक्स होगा यदि $A.A^T = I$

$A.A^T = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = I_2$

अतः A लम्बकोणिय मैट्रिक्स

13. यदि $A = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ हो तो A^2 होगा।

(a) $\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}\sin 2\alpha & \cos 2\alpha\\ -\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ **[b]**

व्याख्या: -

$A^2 = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha\\ -2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{pmatrix}$

14. $\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}$ का प्रतिलोम मैट्रिक्स

(a) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5 & -3\\-4 & 2\end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-5 & 3\\4 & -2\end{bmatrix}$

(c) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 3\\4 & -5\end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -3\\-4 & 5\end{bmatrix}$ **[b]**

व्याख्या: -

$|A| = 10 - 12 = -2$

$\Rightarrow \text{adj}A = \begin{pmatrix}5 & -3\\-4 & 2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix}5 & -3\\-4 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 3\\4 & -2\end{pmatrix}$

15. यदि $2A + B = \begin{bmatrix}3 & 2\\3 & 7\end{bmatrix}$ तथा $A - B = \begin{bmatrix}0 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}$ हो तो A बराबर है।

(a) $\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & 1\end{bmatrix}$ (d) इनमें से कोई नहीं **[a]**

व्याख्या: -

$A = \frac{1}{3}[(2A + B) + (A - B)]$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 3\\6 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}$

16. यदि $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$ हो तो

(a) $AB \neq O, BA \neq O$ (b) $AB \neq 0, BA = 0$
(c) $AB = 0, BA = 0$ (d) $AB \neq O, BA \neq 0$ **[a]**

व्याख्या: -

$AB = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \neq 0.$

$BA = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \neq 0$

17. यदि A, 4 × 4 कोटी का वर्ग मैट्रिक्स हो तो |adjA| बराबर होगा-

(a) $|A|$ (b) $4|A|$
(c) $|A|^3$ (d) $|A|^4$ **[c]**

व्याख्या: -

$|adjA| = |A|^{n-1}$

$\because$ n = 4 $|adjA| = |A|^3$

18. $A = diag(1, -1, 2), B = diag(2, 1, -1)$ हो तो |AB| होगा-

(a) 4 (b) -4
(c) 1 (d) -1 **[a]**

व्याख्या: -

$\because$ यदि $A = dia(a_1\ a_2\ a_3)$

$B = dia(b_1\ b_2\ b_3)$

$AB = dia(a_1 b_1\ a_2 b_2\ a_3 b_3)$

$|AB| = (a_1 b_1)(a_2 b_2)(a_3 b_3)$

$= (1 \times 2)(-1 \times 1)(2 \times -1) = 4$

19. एक विषम-सममित आव्यूह का क्रम (Rank) नहीं हो सकती है?

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 6 **[a]**

व्याख्या: -

विषम सममित आव्यूह के विकर्ण अवयव शून्य होते है अत: इस का क्रम (Rank) एक समवन है।

20. यदि $A^2 - A + I = 0$ तो आव्यूह A का प्रतिलोम होगा:

(a) I – A (b) A – I
(c) A (d) A + 1 **[a]**

व्याख्या: -

$\because A^2 - A + I = 0$

$\Rightarrow A^{-1}(A^2 - A + I) = 0$

$\Rightarrow A^{-1}A^2 - A^{-1}A + A^{-1}I = 0$

$\Rightarrow A - I + A^{-1} = 0$

$(\because A^{-1}A = I \text{ and } A^{-1}I = A^{-1})$

$\Rightarrow A^{-1} = I - A$

21. यदि $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ तो असत्य कथन है-

(a) $A^2 = A$ (b) $A^2 = I$
(c) $A = A^T$ (d) $A^2 = 0$ **[d]**

व्याख्या: -

$A.A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^2 = A \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = A$

किन्तु $A^2 \neq 0$

22. यदि $\lambda \in R$ तथा $\Delta = \begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}$ तो $\lambda\Delta$?

(a) $\begin{vmatrix}\lambda a & \lambda b\\\lambda c & \lambda d\end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix}\lambda a & \lambda b\\c & d\end{vmatrix}$
(c) $\begin{vmatrix}\lambda a & b\\c & d\end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix}\lambda a & \lambda b\\c & \lambda d\end{vmatrix}$ **[b]**

व्याख्या: -

सारणिक अदिश गुणन केवल किसी भी एक पंक्ति अथवा स्तम्भ $\Delta = \begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}$

और $\lambda\Delta = \begin{vmatrix}\lambda a & \lambda b\\c & d\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda a & b\\\lambda c & d\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}a & \lambda b\\c & \lambda d\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & b\\\lambda c & \lambda d\end{vmatrix}$

23. यदि सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix}1 & \sin\theta & 1\\-\sin\theta & 1 & \sin\theta\\-1 & -\sin\theta & 1\end{vmatrix}$ तब Δ का वर्ग अंतराल होगा:

(a) [3,4] (b) [2,4]
(c) [1,4] (d) इनमें से कोई नहीं **[b]**

व्याख्या: -

$\Delta = 1(1 + \sin^2\theta) - \sin\theta(-\sin\theta + \sin\theta) + 1$

$(\text{Sin}^2\theta + 1) = 1 + \sin^2\theta + \sin^2\theta + 1$

$\Delta = 2 + 2\sin^2\theta = 2(1 + \sin^2\theta)$

$\because -1 \leq \sin\theta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2\theta \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq 1 + \sin^2\theta \leq 2$

$\Rightarrow 2 \leq 2(1 + \sin^2\theta) \leq 4$

$\Rightarrow 2 \leq \Delta \leq 4$

24. यदि $A = \begin{bmatrix}1 & \tan\frac{\theta}{2}\\-\tan\frac{\theta}{2} & 1\end{bmatrix}$ तथा AB = I, तो B = ?

(a) $\cos^2\frac{\theta}{2}\ A$ (b) $\cos^2\frac{\theta}{2}\ A^T$
(c) $\cos^2\frac{\theta}{2} I$ (d) इनमें से कोई नहीं **[b]**

व्याख्या: -

$AB = I$

$\Rightarrow B = A^{-1}I \Rightarrow B = A^{-1}$

$\Rightarrow B = \frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\begin{bmatrix}1 & -\tan\frac{\theta}{2}\\\tan\frac{\theta}{2} & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2}\ A^T \quad \left[\because A^T = \begin{bmatrix}1 & -\tan\frac{\theta}{2}\\\tan\frac{\theta}{2} & 1\end{bmatrix}\right]$

25. **यदि $\begin{vmatrix} 5 & a \\ a & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ हो, तो a का मान होगा?**

(a) ± 1 (b) ± 2

(c) ± 3 (d) ± 4 **[c]**

व्याख्या: -

यदि $\begin{vmatrix} 5 & a \\ a & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$10 - a^2 = 4 - 3$

$10 - a^2 = 1 \quad \Rightarrow 10 - 1 = a^2$

$\Rightarrow a^2 = 9 \quad \Rightarrow a = \pm 3$

26. **यदि n क्रम वर्ग मैट्रिक्स A का सारणिक 3 तथा A के सहखण्ड़ज मैट्रिक्स का सारणिक 243 हो तो $n = ?$**

(a) 4 (b) 7

(c) 5 (d) 6 **[d]**

व्याख्या: -

$|A| = 3$

| Adj Al = 243

$\because |\text{Adj}A| = |A|^{n-1}$

$\Rightarrow 3^{n-1} = 243 \Rightarrow 3^{n-1} = 3^5 \Rightarrow n - 1 = 5$

$n = 6$

27. **सारणिक $\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$ का मान होगा।**

(a) 10 (b) 15

(c) -15 (d) 0 **[d]**

व्याख्या: -

$A = \begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 13 & 3 & 3 \\ 14 & 3 & 3 \\ 15 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

28. **यदि A विषम घात की एक विषम सममित आव्यूह है, तो A की सगणिक होगी:**

(a) एक चारतविक संख्या (b) 1

(c) -1 (d) 0 **[d]**

व्याख्या: -

विषम घात के विषम सममित आव्यूह के सारणिक मान सदैव शून्य होता है।

29. **समीकरण $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ का हल है?**

(a) $x = 1, y = 2, z = 3$

(b) $x = 0, y = 1, z = 2$

(c) $x = 2, y = 1, z = 0$

(d) $x = 3, y = 2, z = 1$ **[a]**

व्याख्या: -

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{R_2 \leftrightarrow R_1}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - R_1}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 - 2 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$

$x + y + z = 6 \quad y = 2$

$\Rightarrow -3y + z = -3 \quad z = 3$

$-2y = -4 \quad x = 1$

30. **x का मान ज्ञात करों? $\begin{vmatrix} 3+x & 5 & 2 \\ 1 & 7+x & 6 \\ 2 & 5 & 3+x \end{vmatrix} = 0$**

(a) $x = 0, 1, 12$

(b) $x = 0, 1, -12$

(c) $x = 0, -1, -12$

(d) $x = 1, -1, -12$ **[c]**

व्याख्या: -

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3+x & 5 & 2 \\ 1 & 7+x & 6 \\ 2 & 5 & 3+x \end{vmatrix} = 0 \ \mathbf{R_1 \to R_1 - R_3}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1+x & 0 & -1-x \\ 1 & 7+x & 6 \\ 2 & 5 & 3+x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1+x & 0 & 0 \\ 1 & 7+x & 7 \\ 2 & 5 & 5+x \end{vmatrix} [c_3 \to c_3 + c_1]$

R_1 के सापेक्ष प्रसार

$\Rightarrow (1+x)\{(7+x)(5+x) - 35\} = 0$

$\Rightarrow (1+x)(35 + 7x + 5x + x^2 - 35) = 0$

$\Rightarrow (1+x)(x^2 + 12x) = 0$

$\Rightarrow (1+x)x(x+12) = 0$

$\Rightarrow x = 0, -1, -12$

31. $|x+1 \quad -x+2 \quad x+4|$

$|x+3 \quad x+5 \quad x+8|$

$|x+7 \quad x+10 \quad x+14|$

(a) -2

(b) $x^2 + 2$

(c) 2

(d) इनमें से कोई नहीं **[a]**

व्याख्या: -

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+4 \\ x+3 & x+5 & x+8 \\ x+7 & x+10 & x+14 \end{vmatrix}$$

$c_2 \to c_2 - c_1, c_3 \to c_3 - c_2$

$$= \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ x+3 & 2 & 3 \\ x+7 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_2$

$$= \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$c_3 \to c_3 - c_2$

$$= \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

c_3 के सापेक्ष प्रसार करने पर $= 1\{2-4\} - 0 + 0 = -2$

32. 3 क्रम के सारणिक में $a_{ij} = 0$ यदि $i = j$; $a_{ij} = 1$ यदि $i > j$ तथा $a_i = -1$ यदि $i < j$ हो तो सारणिक = ?

(a) 0 (b) 1

(c) -1 (d) 3 **[a]**

व्याख्या: -

3 क्रम का सारणिक

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow 0(0+1) + 1(0+1) - 1(1-0)$

$\Rightarrow 0 + 1 - 1 = 0$

33. सारणिक $\begin{vmatrix} xp+y & x & y \\ yp+z & y & z \\ 0 & xp+y & yp+z \end{vmatrix} = 0$ यदि:

(a) x, y, z स. श्रे. में हैं

(b) x, y, z गु. श्रे. में हैं

(c) x, y, z ह. श्रे. में है

(d) xy, yz, zx श्रे में हैं **[b]**

व्याख्या: -

$(xp+y)[y(yp+z) - z(xp+y)] - (yp+z)$

$[x(yp+z) - y(xp+y)] + 0(xz - y^2) = 0$

$\Rightarrow (xp+y)(y^2p + zy - zxp - zy) - (yp +$

$z)(yxp + xz - xyp - y^2) = 0$

$\Rightarrow xy^2p^2 - zx^2p^2 + y^3p - xyzp - xyzp + y^3p -$

$z^2x + zy^2 = 0$

$\Rightarrow (xy^2p^2 - zx^2p^2) + (2y^3p - 2xyzp) +$

$(zy^2 - z^2x) = 0$

$\Rightarrow xp^2(y^2 - xz) + 2yp(y^2 - xz) + z(y^2 - xz) = 0$

$\Rightarrow (xp^2 + 2yp + z)(y^2 - xz) = 0 \Rightarrow y^2 = xz$

34. यदि $A = \begin{vmatrix} a & d & l \\ b & e & m \\ c & f & n \end{vmatrix}$ तथा $B = \begin{vmatrix} l & m & n \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ हो तो

(a) $A + B = 0$ (b) $A - B = 0$

(c) $AB = 0$ (d) $\frac{A}{B} = 0$ **[b]**

व्याख्या: -

$$A = \begin{vmatrix} a & d & l \\ b & e & m \\ c & f & n \end{vmatrix}$$

पंक्ति $\leftrightarrow$ स्तम्भ

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ l & m & n \end{vmatrix} R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\Rightarrow A = -\begin{vmatrix} l & m & n \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\Rightarrow A = +\begin{vmatrix} l & m & n \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow A = B \Rightarrow A - B = 0$

35. यदि $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ हो तो $adjA = ?$

(a) $\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \delta & -\gamma \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & \delta \end{bmatrix}$ **[c]**

व्याख्या: -

सारणिक $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

$\Rightarrow adjA = \begin{bmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}^T$

$\therefore Adj(A) = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$

36. यदि $ax^3 + bx^2 + cx + d = \begin{vmatrix} x+1 & 2x & 3x \\ 2x+3 & x+1 & x \\ 2-x & 3x+4 & 5x-1 \end{vmatrix}$ तो 'd'= RPSC II Grade 2013

(a) -1 (b) 1

(c) 2 (d) -2 **[a]**

व्याख्या: -

$x = 0$ रखने पर $d = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -1$

37. यदि ' A ' एक वर्ग मैट्रिक्स हो, तथा $k \in R$ तो $adj(k\,A) =$ RPSC II Grade 2013

(a) k^{n+2}adj A

(b) k^{n+1}adj A

(c) k^{n-1}adj A

(d) k^{n}adj A **[c]**