अनुक्रमणिका

क्रम संख्या	विषय वस्तु	पेज संख्या
1.	भौतिक जगत एवं मापन (Physical World and Measurements)	1 - 15
2.	सदिश (Vectors)	16 - 24
3.	गतिकी (Kinematics)	25 - 39
4.	गति के नियम (Laws Of Motion)	40 - 53
5.	कार्य, ऊर्जा एवं शक्ति (Work, Energy & Power)	54 - 67
6.	घर्षण (Friction)	68 - 78
7.	घूर्णन गति (Rotational Motion)	79 - 102
8.	गुरुत्वाकर्षण (Gravitation)	103 - 115
9.	पदार्थ के गुण (Properties of Matter)	116 - 130
10.	तरल यांत्रिकी (Fluid Mechanics)	131 - 143
11.	पृष्ठ तनाव (Surface Tension)	144 - 154
12.	विद्युत धारा (Current Electricity)	155 - 168

क्रम संख्या	विषय वस्तु	पेज संख्या
13.	विद्युत धारा का चुंबकीय प्रभाव (Magnetic Effect Of Current)	169 - 183
14.	विद्युत चुंबकीय प्रेरण (Electromagnetic Induction)	184 - 196
15.	किरण प्रकाशिकी (Ray Optics)	197 - 219
16.	यांत्रिकी (Mechanics)	220 - 236
17.	स्थिर वैद्युतिकी (Classical Electrodynamics)	237 - 258
18.	तरंग प्रकाशिकी (Wave Optics)	259 - 271
19.	तापीय और सांख्यिकीय भौतिकी (Thermal and Statistical Physics)	272 - 288
20.	क्वांटम यांत्रिकी (Quantum Mechanics)	289 - 300
21.	परमाणु एवं नाभिकीय भौतिक (Atomic and Nuclear Physics)	301 - 320
22.	वैद्युतिकी (Electronics)	321 - 340

01 भौतिक जगत एवं मापन (Physical World and Measurements)

- प्रकृति में सुव्यवस्थित अध्ययन जो किया जाता है वह विज्ञान का विषय है। इस प्रकार से कह सकते हैं कि प्रेक्षित तथ्यों एवं उनकी पारस्परिक निर्भरताओं पर आधारित ज्ञान के विशाल सागर का नाम ही विज्ञान है।
- वस्तुतः Science शब्द की उत्पत्ति लेटिन शब्द Scientia से हुई है।
- भौतिक विज्ञान- दिक्काल (space-time) में जिसका भी अस्तित्व प्रयोग विधि से प्रमाणित किया जा सकता है, उसे भौतिक कहते हैं। Space-time दोनों भौतिक अवधारणायें हैं।
- "द्रंव्य व ऊर्जा" का अध्ययन भौतिक विज्ञान में आता है।"
- विज्ञान की सबसे महत्त्वूपर्ण शाखा भौतिक विज्ञान है। भौतिक विज्ञान को अभियान्त्रिकी (Engineering) व प्रौद्योगिकी (Technology) का जन्मदाता कहा जाता है। इसलिये हम कह सकते हैं कि भौतिक विज्ञान आधारभूत विज्ञान है।
- भौतिकी की विभिन्न शाखाओं को दो मुख्य प्रकार में बांटा गया है-
  (i) चिरसम्मत भौतिकी
  (ii) आधुनिक व क्वांटम भौतिकी

चिरसम्मत भौतिकी (Classical Physics)

(i) **यांत्रिकी -** यह स्थिर व गतिमान वस्तुओं की भौतिकी है। इसकी उपशाखा स्थैतिकी (statics) और गतिकी (dynamics) है।

(ii) **ऊष्मागतिकी -** ऊष्मागतिकी में ऊष्मा से संबंधित अध्ययन किया जाता है। इसमें ऊष्मीय ऊर्जा को ऊर्जा के अन्य रूपों में बदला जा सकता है।

(iii) **चिरसम्मत तरंग यांत्रिकी एवं ध्वनि -** तरंग में ऊर्जा का संचरण होता है। ध्वनि भी एक तरंग है। ध्वनि तरंग भौतिकी की उपशाखा है। जिसमें ध्वनि की उत्पत्ति, संरचना, बोध इत्यादि का अध्ययन करते हैं।

(iv) **प्रकाशिकी -** प्रकाश में जो अध्ययन किया जाता है, उसी को प्रकाशिकी कहते हैं। इसकी मुख्य शाखायें दो हैं
(i) तरंग प्रकाशिकी (ii) किरण प्रकाशिकी (ray optics)।

(v) **विद्युत चुम्बकत्व (Electro magnetism)-** वैद्युतिकी एवं चुम्बकत्व इस तरह एकीकृत हैं कि इन्हें विद्युत चुम्बकत्व की उपशाखा कहते हैं।

- **आधुनिक व क्वांटम भौतिकी**
  (i) परमाणु भौतिकी
  (ii) नाभिकीय भौतिकी
  (iii) अणु क्वांटम यान्त्रिकी
  (iv) ठोस अवस्था भौतिकी
  (v) उच्च ऊर्जा भौतिकी या कण भौतिकी
  (vi) विशिष्ट सापेक्षता
  (vii) सापेक्षता का सामान्य सिद्धान्त व ब्रह्मांडिकी
  (viii) प्लाज्मा भौतिकी
  (ix) अंतरिक्ष भौतिकी
  (x) इलेक्ट्रोनिक्स
- वैज्ञानिक सिद्धान्तों की जब प्रयोग द्वारा पुष्टि होती है, तब ही उसको स्वीकारा जाता है।
- भौतिक विज्ञान में दक्षता के लिये गणित में निपुणता आवश्यक है।
- किसी भी देश का तकनीकी विकास भौतिक विज्ञान पर आधारित है।
- प्रमुख भारतीय भौतिकीविद्-भास्कराचार्य, सी.वी. रमन, मेघनाद साहा, एस. एन. बोस, भाभा, राजा रामन्ना, अब्दुल कलाम ।
- प्रकृति के मूल बल चार हैं-
  (i) गुरुत्वीय बल
  (ii) विद्युत चुम्बकीय बल
  (iii) नाभिकीय बल
  (iv) दुर्बल बल।

भौतिक राशि (Physical Quantity)

- राशि जिसे मापा जा सके तथा जिसके द्वारा विभिन्न भौतिक घटनाओं को नियमों के रूप में समझाया तथा व्यक्त किया जा सके, भौतिक राशि कहलाती है। उदाहरण के लिए लम्बाई द्रव्यमान, समय, बल आदि।
- दूसरे शब्दों में जीवन में विभिन्न घटनायें जैसे खुशी, दुख आदि भौतिक राशियाँ नहीं हैं क्योंकि इन्हें मापा नहीं जा सकता।
- भौतिक राशि का परिमाण ज्ञात करने के लिए, दो समान भौतिक राशियों की तुलना करने के लिए तथा भौतिक नियमों अथवा समीकरणों को सिद्ध करने के लिए, मापन आवश्यक होता है।
- भौतिक राशि को इसके परिमाण तथा मात्रक द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।
  उदाहरण के लिए, 10 मीटर का अर्थ वह लम्बाई है जो 1 मीटर लम्बाई की 10 गुनी है। यहाँ 10 दी गई राशि का आंकिक मान है तथा मीटर से राशि का मात्रक प्रदर्शित होता है। अतः भौतिक राशि को व्यक्त करने में हम एक मात्रक चुनते हैं तथा फिर ज्ञात करते हैं कि वह मात्रक दी गई भौतिक राशि में कितने गुने तक है। अर्थात्
- भौतिक राशि $(Q) =$ परिमाण × मात्रक $= n \times u$ जहाँ, n आंकिक मान को तथा u मात्रक को प्रदर्शित करता है। अतः भौतिक राशि की निश्चित मात्रा को व्यक्त करते समय यह स्पष्ट है कि जैसे ही मात्रक (u) परिवर्तित होता है, परिमाण (n) भी परिवर्तित हो जाता है परन्तु गुणनफल ' nu ' अपरिवर्तित बना रहता है।
- अर्थात् $nu =$ नियतांक, $\Rightarrow n_1u_1 = n_2u_2 =$ नियतांक
  $\Rightarrow n \propto \frac{1}{u}$
- अर्थात् भौतिक राशि का परिमाण तथा मात्रक एक दूसरे के व्युत्क्रमानुपाती होते हैं। मात्रक जितना बड़ा होगा, उसका परिमाण उतना ही कम होगा।

भौतिक राशियों के प्रकार (Types of Physical Quantity)

(1) **अनुपात (केवल आंकिक मान) :** जब एक भौतिक राशि दो समान राशियों का अनुपात होती है तो इसका कोई मात्रक नहीं होता।

◈ **उदाहरण के लिये**
आपेक्षिक घनत्व = वस्तु का घनत्व /4°C पर पानी का घनत्व
अपवर्तनांक = वायु में प्रकाश का वेग/माध्यम में प्रकाश का वेग
विकृति = विभा में परिवर्तन/मूल विभा

(2) **अदिश (केवल परिमाण) :** इन राशियों की कोई दिशा नहीं होती है। जैसे - लम्बाई, समय, कार्य, ऊर्जा आदि।

◈ भौतिक राशि का परिमाण ऋणात्मक हो सकता है। इस स्थिति में ऋणात्मक चिन्ह यह दर्शाता है कि राशि का आंकिक मान ऋणात्मक है। यह दिशा को नहीं दर्शाता।

◈ अदिश राशियों को योग अथवा अन्तर के सामान्य नियमों की सहायता से जोड़ा अथवा घटाया जा सकता है।

(3) **सदिश (परिमाण तथा दिशा) :** सदिश राशियों का परिमाण तथा दिशा दोनों होती है तथा सदिश राशियों को सदिश बीजगणित के नियमों के अनुसार जोड़ा अथवा घटाया जाता है।
उदाहरण : विस्थापन, वेग, त्वरण, बल आदि।

◈ कुछ ऐसी भौतिक राशियाँ होती हैं, जो परिमाण व दिशा द्वारा भी पूर्ण रूप से परिभाषित नहीं होती हैं। ऐसी भौतिक राशियाँ 'प्रदिश' कहलाती हैं, जैसे - जड़त्व आघूर्ण।

मूलभूत तथा व्युत्पन्न राशियाँ (Fundamental and Derived Quantities)

(1) **मूलभूत राशियाँ :** प्रकृति में विद्यमान कई भौतिक राशियों में से कुछ ही राशियाँ ऐसी हैं जो अन्य राशियों से स्वतंत्र होती हैं तथा इन्हें परिभाषित करने के लिए अन्य भौतिक राशियों की आवश्यकता नहीं होती। अतः इन्हें निरपेक्ष राशियाँ कहते हैं। इन राशियों को मूलभूत राशियाँ अथवा मूल राशियाँ भी कहते हैं क्योंकि अन्य राशियाँ इन पर निर्भर रहती हैं तथा इन राशियों के पदों में व्यक्त की जा सकती है।

(2) **व्युत्पन्न राशियाँ :** अन्य सभी भौतिक राशियों को मूलभूत राशियों की विभिन्न घातों से भाग अथवा गुणनफल द्वारा व्युत्पन्न किया जा सकता है। अतः ये राशियाँ व्युत्पन्न राशियाँ कहलाती हैं।

◈ यदि लम्बाई को मूलभूत राशि के रूप में परिभाषित किया जाये तो क्षेत्रफल तथा आयतन, लम्बाई से व्युत्पन्न हो जाते हैं तथा लम्बाई की घात क्रमशः 2 अथवा 3 के साथ व्यक्त किये जा सकते हैं।

◈ वेग (Velocity) भी एक व्युत्पन्न राशि है, जिसे लम्बाई और समय के अनुपात (लम्बाई/समय) के रूप में व्यक्त किया जाता है।

Note

◈ यांत्रिकी में लम्बाई, द्रव्यमान तथा समय मूलभूत राशियाँ चुनी गई हैं, हालांकि भौतिक राशियों का यह समुच्चय अद्वितीय चयन नहीं है।

◈ वास्तव में हम यांत्रिकी में कोई भी तीन राशियाँ मूलभूत राशियों की तरह ले सकते हैं तो अन्य राशियाँ इनके पदों में व्यक्त की जा सकती है।

◈ उदाहरण के लिए, यदि चाल तथा समय को मूलभूत राशियों के रूप में लिया जाये तो लम्बाई व्युत्पन्न राशि बन जाती है क्योंकि लम्बाई अब, चाल×समय के रूप में व्यक्त की जायेगी तथा यदि बल तथा त्वरण मूलभूत राशियाँ ली जायें तो द्रव्यमान को बल / त्वरण से परिभाषित किया जायेगा तथा यह व्युत्पन्न राशि कहलायेगा।

मूलभूत मात्रक (Fundamental Units)

◈ सामान्यतः प्रत्येक भौतिक राशि को परिभाषित करने के लिए एक मात्रक की आवश्यकता होती है। अतः ऐसा प्रतीत होता है कि कई भौतिक राशियों के लिये कई मात्रक अवश्य होने चाहिए। यद्यपि ऐसा नहीं है। यह पाया गया है कि यदि यांत्रिकी में हम कोई तीन स्वेच्छ भौतिक राशियों के मात्रक चुन लें तो यांत्रिकी में अन्य भौतिक राशियों के मात्रकों को इनके पदों में व्यक्त किया जा सकता है। इस उद्देश्य के लिए द्रव्यमान, लम्बाई तथा समय स्वेच्छतः चुनी गई भौतिक राशियाँ हैं। अतः यांत्रिकी में द्रव्यमान, लम्बाई तथा समय के किसी भी मात्रक को मूलभूत अथवा निरपेक्ष अथवा मूल मात्रक कहते हैं। अन्य मात्रक जो इन मूलभूत मात्रकों के पदों में व्यक्त किये जा सकते हैं व्युत्पन्न मात्रक कहलाते हैं। उदाहरण के लिए प्रकाश वर्ष अथवा किलोमीटर मूल मात्रक हैं, क्योंकि ये लम्बाई के मात्रक हैं। जबकि $\sec^{-1}, m^2$ अथवा $\mathrm{kg/m}$ व्युत्पन्न मात्रक हैं क्योंकि ये लम्बाई, द्रव्यमान तथा समय के मात्रकों से व्युत्पन्न किये गये हैं।

◈ **मात्रकों की पद्धति :** सभी प्रकार की भौतिक राशियों के लिए मूलभूत तथा व्युत्पन्न दोनों मात्रकों का समुच्चय मात्रकों की पद्धति कहलाती है। प्रचलित पद्धतियाँ निम्न प्रकार हैं -

(1) **CGS पद्धति :** यह पद्धति मात्रकों की गॉसीय पद्धति भी कहलाती है। इसमें लम्बाई, द्रव्यमान, तथा समय मूलभूत राशियों के रूप में ली जाती हैं तथा इनके संगत मात्रक क्रमशः सेण्टीमीटर (cm), ग्राम (g) तथा सेकण्ड (s) होते हैं।

(2) **MKS पद्धति :** यह पद्धति जॉर्जी (Gorgi) पद्धति भी कहलाती है। इस पद्धति में भी लम्बाई, द्रव्यमान तथा समय मूलभूत राशियों के रूप में लिए जाते हैं तथा इनके संगत मूल मात्रक मीटर, किलोग्राम तथा सेकण्ड होते हैं।

(3) **FPS पद्धति :** इस पद्धति में फुट, पॉउण्ड तथा सेकण्ड क्रमशः लम्बाई, द्रव्यमान तथा समय के लिए मूलभूत मात्रक लिये जाते हैं। इस पद्धति में बल व्युत्पन्न राशि है जिसका मात्रक पाउण्डल है।

(4) S. I. पद्धति : यह मात्रकों की अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति है तथा सम्पूर्ण भौतिकी में प्रयुक्त होने वाली विस्तृत पद्धति है। इसे आधुनिक M.K.S. पद्धति कहते हैं। इस पद्धति में सात मूलभूत राशियाँ हैं। ये राशियाँ तथा इनके मात्रक निम्न तालिका में दिये गये हैं।

मात्रक तथा राशियों के संकेत

राशि	मात्रक का नाम	प्रतीक
लम्बाई	मीटर (Metre)	m
द्रव्यमान	किलोग्राम (Kilogram)	kg
समय	सेकण्ड (Second)	s
विद्युत धारा	ऐम्पियर (Ampere)	A
ताप	केल्विन (Kelvin)	K
पदार्थ की मात्रा	मोल (Mole)	mol
ज्योति तीव्रता	केण्डिला (Candela)	cd

❖ उपरोक्त सात मूलभूत राशियों के अतिरिक्त दो पूरक राशियाँ होती हैं जिनके मात्रक निम्न हैं -

S. No.	भौतिक राशि	मात्रक का नाम	संकेत
1.	समतल कोण	रेडियन	rad
2.	घन कोण	स्टेरेडियन	sr

Note :

❖ मूलभूत तथा व्युत्पन्न मात्रकों के अतिरिक्त हम कई बार व्यवहारिक मात्रकों का भी उपयोग करते हैं। ये व्यवहारिक मात्रक मूलभूत अथवा व्युत्पन्न किसी भी प्रंकार के हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, प्रकाश वर्ष दूरी का व्यवहारिक मात्रक (मूलभूत) है जबकि अश्वशक्ति, शक्तिं का व्यंवहारिक (व्युत्पन्न) मात्रक है।

❖ व्यवहारिक मात्रक, मात्रकों की पद्धति में हो सकता है और नहीं भी लेकिन इसे मात्रकों की किसी भी पद्धति में व्यक्त किया जा सकता है। **उदाहरण के लिए**, 1 mile = 1.6 km = 1.6×10^3 m

मूल मात्रकों की परिभाषाएँ-

❖ मात्रक के मानक मान को परिभाषित करने की प्रक्रिया काफी जटिल होती है और इसमें आधुनिक उपकरणों का प्रयोग किया जाता है। अत: इस प्रक्रिया को पूरी तरह से नहीं समझा जा सकता है।

(a) मीटर (Meter) : यह लम्बाई का मात्रक है। निर्वात् (Vacuum) में 1/299,792,458 सेकण्ड में प्रकाश द्वारा तय की गई दूरी को 1 मीटर कहते हैं।

(b) किलोग्राम (Kilogram) : अन्तर्राष्ट्रीय बाट-माप संस्था के द्वारा बनाए गये प्लेटिनम-इरेडियम मिश्रधातु के बेलन, के द्रव्यमान का मान 1 किलोग्राम होता है।

(c) सेकण्ड (Second) : वह समय जिसमें सीजियम (Cs^{133}) के परमाणु 9,192,631,770 बार कम्पन्न करते हैं एक सेकण्ड कहलाता है।

(d) ऐम्पियर (Ampere) : मान लो निर्वात् में एक मीटर दूरी पर दो समान्तर अनन्त लम्बाई तथा नगण्य त्रिज्या वाले तार रखे हुए हैं। दोनों तारों में एक ही दिशा में विद्युत धारा प्रवाहित की जाती है। फलस्वरूप दोनों तार एक दूसरे को आकर्षित करेगें। यदि दोनों में. सामान विद्युत धारा इस तरह प्रवाहित हो कि उनके मध्य प्रति मीटर लम्बाई पर 2×10^{-7} न्यूटन का बल उत्पन्न हो तो किसी भी तार में विद्युत धारा 1 A कही जाती है। यहाँ न्यूटन बल का SI मात्रक है।

(e) केल्विन (Kelvin): पानी के त्रिक् बिन्दु (triple point) पर उष्मागतिकी ताप का $\frac{1}{273.16}$ वाँ भाग 1 K कहलाता है।

(f) मोल (Mole): एक मोल पदार्थ का वह द्रव्यमान है जिसमें मूल अवयवों की संख्या उतनी होती है जितनी की $_6C^{12}$ के 0.012 किलोग्राम में कार्बन परमाणुओं की संख्या होती है।

❖ यह कार्बन परमाणुओं (0.012 किग्रा में) की संख्या एवोगाद्रो नियतांक (Avogadro constant) कहलाती है और इसका मान 6.022×10^{23} होता है।

(g) कैन्डेला (Candela): प्रदीपन तीव्रता का SI मात्रक 1 cd होता है जो हिमांक प्लेटिनम ताप पर एवं 101,325 न्यूटन/मी.^{2} दाब पर $\frac{1}{600,000}$ मी^{2} पृष्ठ क्षेत्रफल के विकिरण-शोषी (Black body) के तल के लम्बवत् दिशा में प्रदीपन तीव्रता के बराबर है।

पूरक मात्रकों की परिभाषाएँ

(i) रेडियन (Radian) : एक रेडियन वह तलीय कोण है जो वृत्त त्रिज्या के बराबर का चाप वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित करता है। इसका संकेत 'rad' होता है।

(ii) स्टेरेडियन (Steradian) : एक स्टेरेडियन वह ठोस कोण है जो कि गोले के पृष्ठ का एक भाग (जिसका क्षेत्रफल गोले की त्रिज्या के वर्ग के बराबर है) गोले के केन्द्र पर अन्तरित करता है। इसका संकेत 'Sr' होता है।

S.I. पूर्वलग्न (S.I. Prefixes)

❖ भौतिकी में बहुत सूक्ष्म (माइक्रो) से बहुत बड़े (मेक्रो) परिमाणों का अध्ययन करते हैं। जैसे एक ओर हम किसी परमाणु के बारे में बात करते हैं जबकि दूसरी तरफ ब्रह्माण्ड की बात करते हैं।

❖ उदाहरण के लिए, इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान 9.1×10^{-31} kg है, जबकि सूर्य का द्रव्यमान 2×10^{30} kg है। ऐसे बड़े अथवा छोटे परिमाणों को व्यक्त करने हेतु हम निम्न पूर्व लग्नों का प्रयोग करते हैं

पूर्वलग्न तथा संकेत

10 की घात	पूर्वलग्न	प्रतीक
10^{18}	ऐक्सा (Exa)	E
10^{15}	पेंटा (Penta)	P
10^{12}	टेरा (Terra)	T
10^{9}	गीगा (Giga)	G
10^{6}	मेगा (Mega)	M
10^{3}	किलो (Kilo)	k
10^{2}	हेक्टो (Hecto)	h
10^{1}	डेका (Deca)	da
10^{-1}	डेसी (Deci)	d
10^{2}	सेन्टी (Centi)	c
10^{-3}	मिली (Mili)	m
10^{-4}	माइक्रो (Micro)	μ
10^{-9}	नेनो (Nano)	n
10^{-12}	पीको (Pico)	p
10^{-15}	फेमटो (Femto)	f
10^{-18}	ओंटो (Atto)	a

व्यवहारिक मात्रक
(Practical Units)

(1) लम्बाई

(i) फर्मी (Fermi) $= 1\text{fm} = 10^{-15}$ m

(ii) 1 एक्स-रे मात्रक (X-ray unit)
$= 1XU = 10^{-13}$ m

(iii) 1 एंगस्ट्रॉम (Angstrom)
$= 1\text{Å} = 10^{-10}\text{ m} = 10^{-8}\text{ cm} = 10^{-7}\text{ mm} = 0.1\mu\text{ mm}$

(iv) 1 माइक्रोन (Micron) $= \mu m = 10^{-6}$ m

(v) 1 खगोलीय मात्रक (Astronomical unit)
$= 1A.U. = 1.49 \times 10^{11}\text{ m} \approx 1.5 \times 10^{11}\text{ m} = 10^{8}\text{ km}$

(vi) 1 प्रकाशवर्ष (Light year)
$= 1\text{ly} = 9.46 \times 10^{15}$ m

(vii) 1 पारसेक (Parsec) $= 1pc = 3.26$ प्रकाश वर्ष

(2) द्रव्यमान

(i) चन्द्रशेखर इकाई (Chandrashekhar unit):
1CSU = सूर्य के द्रव्यमान का 1.4 गुना $= 2.8 \times 10^{30}$ kg

(ii) मीट्रिक टन (Metric tonne) :
1 मीट्रिक टन = 1000 kg

(iii) क्विण्टल (Quintal):
1 क्विण्टल = 100 kg

(iv) परमाणवीय द्रव्यमान मात्रक (Atomic mass unit) :
$1\text{amu} = 1.67 \times 10^{-27}$ kg प्रोटॉन अथवा न्यूट्रॉन का द्रव्यमान 1 amu की कोटि का होता है। यह द्वितीय द्रव्यमान मानक कहलाता है।

(3) समय

(i) वर्ष (Year): सूर्य के चारों ओर पृथ्वी को अपनी कक्षा में एक चक्र पूर्ण करने में लगा समय 1 वर्ष होता है। (1 वर्ष = 365.25 दिन $= 3.156 \times 10^{7}$ सेकण्ड)

(ii) चन्द्रमास् (Lunar month): पृथ्वी के चारों ओर चन्द्रमा द्वारा अपनी कक्षा में एक चक्र पूर्ण करने में लगा समय 1 चन्द्रमास् होता है।
1 चन्द्रमास् = 27.3 दिन

(iii) सौर दिवस (Solar day): सूर्य के सापेक्ष पृथ्वी द्वारा अपनी अक्ष के परितः एक पूर्ण घूर्णन में लगा समय सौर दिन कहलाता है। चूँकि यह समय दिन-प्रतिदिन परिवर्तित होता रहता है। अतः एक वर्ष में सभी दिनों के अन्तरालों का औसत लेकर औसत सौर दिन ज्ञात किया जाता है।
1 सौर वर्ष = 365.25 औसत सौर दिवस
अथवा औसत सौर दिवस = सौर वर्ष का $\frac{1}{365.25}$ भाग

(iv) सैडरियल दिवस (Sidereal day) : किसी दूरस्थ तारे के सापेक्ष पृथ्वी द्वारा अपनी अक्ष के परितः एक पूर्ण घूर्णन में लगा समय एक सैडरियल दिवस कहलाता है।
1 सौर वर्ष = 366.25 सैडरियल दिवस = 365.25 औसत सौर दिन
अतः 1 सैडरियल दिवस 1 सौर दिवस से लगभग 4 मिनिट कम होता है।

(v) शेक (Shake): यह समय का व्यवहारिक किन्तु प्राचीन मात्रक है
1 शेक $= 10^{-8}$ सेकण्ड

व्युत्पन्न मात्रक
(Derived Units)

- मूलभूत राशियों की विभिन्न घातों से भाग अथवा गुणनफल द्वारा व्युत्पन्न किया जा सकता है। अतः ये राशियाँ व्युत्पन्न राशियाँ कहलाती हैं।
- कुछ व्युत्पन्न भौतिक राशियाँ एवं उनके व्युत्पन्न मात्रक निम्न सारणी में दिये गये हैं-

व्युत्पन्न राशियाँ एवं उनके मात्रक

व्युत्पन्न राशियाँ	व्युत्पन्न मात्रक	मूल मानकों के रूप में मात्रक
बल	न्यूटन (N)	Kg. m/s^2
कार्य अथवा ऊर्जा	जूल (J)	$\text{Kg. m}^2/\text{s}^2$
शक्ति ·	वाट (W)	$\text{Kg. m}^2/\text{s}^3$
दाब	पास्कल (P)	Kg./ms^2
विद्युत आवेश	कूलॉम (C)	A.s.
विभवान्तर	वोल्ट	$\frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$
विद्युत प्रतिरोध	ओम (Ω)	$\frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$
विद्युत धारिता	फैराड (F)	$\frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^4}{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}$
विद्युत प्रेरकत्व-	हेनरी (H)	$\frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}$
चुम्बकीय फ्लक्स	वेबर (Wb)	$\frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^2}$.
चुम्बकीय फ्लक्स घनत्व	टेस्ला (T)	Kg.
प्रदीप्ति फ्लक्स	ल्यूमेन (Im)	Cd.Sr
प्रदीप्तिपन	लक्स (lx)	$\frac{\text{lm}}{\text{m}^2}$

विमाएँ
(Dimensions)

- सभी भौतिक राशियों को मूल राशियों से प्राप्त किया जा सकता है। जब किसी राशि को मूल राशियों के पदों में व्यक्त किया जाता है तो इसे मूल राशियों के विभिन्न घातों के गुणा के रूप में लिखा जाता है।
- 'व्यंजक के रूप में मूल राशि के घातांक (exponent) को उस मूल में राशि की विमा कहते हैं।'
  उदाहरण के लिए, भौतिक राशि 'बल' मान लो।
- जैसा कि हम सभी जानते हैं;
  बल = द्रव्यमान × त्वरण,
  त्वरण = वेग में परिवर्तन/ समय अंतराल
  वेग = लम्बाई/समय-अतंराल
  इस प्रकार,
  बल = द्रव्यमान × त्वरण
  = द्रव्यमान × वेग / समय
  = द्रव्यमान × $\frac{\text{दूरी / समय}}{\text{समय}}$
  = द्रव्यमान × दूरी × (समय)$^{-2}$
- इस प्रकार, बल की विमा द्रव्यमान में 1 लम्बाई में 1 तथा समय में -2 है। यह सभी दूसरे मूल राशियों में विमा शून्य है। इस तरह के परिकलन में राशियों का परिमाण नही माना जाता है।
- सुविधा की दृष्टि से मूल राशियों को एक अक्षर चिह्न से निरुपित किया जाता है। सामान्यत: द्रव्यमान को M , लम्बाई को L , समय को T तथा विद्युत धारा को A से निरुपित किया जाता है।
- उष्मागतिकी ताप, पदार्थ की राशि तथा प्रदीपन तीव्रता को क्रमशः k, mol तथा cd से निरूपित किया जाता है।
- भौतिक राशियों की मूल राशियों के पदों में कोष्ठक के-अंदर व्यक्त किया जाता है जो यह बतलाता है कि समीकरण विमा में हैं न कि परिमाण में । इस प्रकार, समीकरण को लिखा जा सकता है:
  [बल] = MLT^{-2}
- भौतिक राशियों के लिए मूल राशियों के पदों में ऐसे व्यंजक को विमीय सूत्र (dimensional formula) कहते हैं।
  अतः बल का विमीय सूत्र MLT^{-2} है।

नीचे विभिन्न भौतिक राशियों के विमीय सूत्र दिये गये हैं।

- क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = $[L \times L] = [L^2]$
- आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई
  $= [L \times L \times L] = [L^3]$
- वेग (या चाल) = $\frac{\text{विस्थापन}}{\text{समय}}$ या $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \left[\frac{L}{T}\right] = [LT^{-1}]$
- त्वरण = $\frac{\text{वेग में परिवतन}}{\text{समय}} = \frac{[LT^{-1}]}{[T]} = [LT^{-2}]$
- बल = द्रव्यमान × त्वरण = $[M][LT^{-2}] = [MLT^{-2}]$
- कार्य = बल × विस्थापन = $[MLT^{-2}][L] = [ML^2\,T^{-2}]$
- शक्ति = $\frac{\text{कार्य}}{\text{समय}} = \left[\frac{ML^2\,T^{-2}}{T^2}\right] = [ML^2\,T^{-3}]$
- घनत्व = $\frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}} = \frac{[M]}{[L^3]} = [ML^{-3}]$
- रेखीय संवेग = द्रव्यमान × वेग = $[M][LT^{-1}] = [MLT^{-1}]$
- गतिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}$ × द्रव्यमान × (वेग)^2
  $= [M][LT^{-1}]^2 = [ML^2\,T^{-2}]$
- स्थितिज ऊर्जा = द्रव्यमान × गुरुत्वीय त्वरण × दूरी
  $= [M][LT^{-2}][L] = [ML^2\,T^{-2}]$
- दाब = बल/क्षेत्रफल = $\frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]} = [ML^{-1}\,T^{-2}]$
- प्रतिबल = बल/क्षेत्रफल = $\frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]} = [ML^{-1}\,T^{-2}]$
- विकृति= लम्बाई में परिवर्तन/प्रारम्भिक लम्बाई
  $= \frac{[L]}{[L]} = [L^{\circ}]$ (विमाहीन)
- प्रत्यास्थता गुणांक = प्रतिबल / विकृति = $[ML^{-1}\,T^{-2}]$
- पृष्ठ तनाव = बल/लम्बाई = $\frac{[MLT^{-2}]}{[L]} = [MT^{-2}]$
- गुरुत्वीय नियतांक **G** :
  $$F = G\frac{m_1\,m_2}{r^2}$$
  $$G = \frac{Fr^2}{m_1\,m_2} = \frac{\text{बल} \times (\text{ दूरी })^2}{\text{द्रव्यमान} \times \text{द्रव्यमान}}$$
  $$= \frac{[MLT^{-2}][L^2]}{[M][M]} = [M^{-1}\,L^3\,T^{-2}]$$
- गुरुत्वीय क्षेत्र = गुरुत्वाकर्षण बल/द्रव्यमान
  $= \frac{[MLT^{-2}]}{[M]} = [LT^{-2}]$
- आवृत्ति =1/ आवर्त्तकाल = $[T^{-1}]$
- कोण = चाप/त्रिज्या = $\frac{[L]}{[L]} = [L^{\circ}]$
  कोण विमाहीन राशि होती है।
- वेग प्रवणता = वेग में परिवर्तन/दूरी = $\frac{[LT^{-1}]}{[L]} = [T^{-1}]$
- श्यानता गुणांक (η) : $\eta = \frac{F}{A(\Delta v_x/\Delta z)}$
  ∴ η की विमा = $\frac{[MLT^{-2}]}{[L^2][T^{-1}]} = [ML^{-1}\,T^{-1}]$
- कोणीय वेग = कोण/समय = $\frac{[L^{\circ}]}{[T]} = [T^{-1}]$
- कोणीय त्वरण = कोणीय वेग/समय = $\frac{[T^{-1}]}{[T]} = [T^{-2}]$
- जड़त्व आघूर्ण = द्रव्यमान × (दूरी) ^{2}
  $= [M] \times [L^2] = [ML^2]$
- कोणीय संवेग = जड़त्व-आघूर्ण × कोणीय वेग
  $= [ML^2] \times [T^{-1}] = [ML^2\,T^{-1}]$
- विशिष्ट उष्मा = $\frac{\text{ऊष्मीय ऊर्जा}}{\text{द्रव्यमान} \times \text{ताप वृद्धि}}$
  $= \frac{[ML^2\,T^{-2}]}{[M][\theta]} = [L^2\,T^{-2}\theta^{-1}]$
- उष्मा धारिता = द्रव्यमान × विशिष्ट ऊष्मा
  $= [M][L^2\,T^{-2}\theta^{-1}] = [ML^2 \cdot T^{-2}\theta^{-1}]$
  दूरी का सबसे बड़ा मात्रक पारसेक तथा द्रव्यमान का सबसे बड़ा मात्रक : चन्द्रशेखर सीमा (C.S.L.) है।
  1 पारसेक = 3.1×10^{16} मीटर = 3.26 प्रकाश वर्ष
  1 C.S.L. = $1.4 \times$ सूर्य का द्रव्यमान
- समय का सबसे छोटा मात्रक शेक है।
  1 शेक = 10^{-8} सेकण्ड

समान विमाओं वाली भौतिक राशियाँ (Quantities Having Same Dimensions)

विमायें	राशियाँ
$[M^0L^0T^{-1}]$	आवृत्ति, कोणीय आवृत्ति, कोणीय वेग, वेग प्रवणता तथा क्षय नियतांक
$[M^1L^2T^{-2}]$	कार्य, आन्तरिक ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा, बल आघूर्ण
$[M^1L^{-1}T^{-2}]$	दाब. प्रतिबल, यंग प्रत्यास्थता गुणांक, आयतन प्रत्यास्थता गुणांक, दृढ़ता गुणांक, ऊर्जा घनत्व
$[M^1L^1T^{-1}]$	संवेग, आवेग
$[M^0L^1T^{-2}]$	गुरुत्वीय त्वरण, गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता
$[M^1L^1T^{-2}]$	प्रणोद, बल, भार, ऊर्जा प्रवणता
$[M^1L^2T^{-1}]$	कोणीय संवेग तथा प्लांक नियतांक
$[M^1L^0T^{-2}]$	पृष्ठ तनाव, पृष्ठीय ऊर्जा, (ऊर्जा प्रति इकाई क्षेत्रफ्ल)
$[M^0L^0T^0]$	विकृति, अपवर्तनांक, आपेक्षिक घनत्व, कोण, घन कोण दूरी प्रवणता, आपेक्षिक विद्युतशीलता (परावैद्युतांक), आपेक्षिक चुम्बकनशीलता, पायसन अनुपात आदि
$[M^0L^2T^{-2}]$	गुप्त ऊष्मा तथा गुरूत्वीय विभव
$[ML^2T^{-2}\theta^{-1}]$	ऊष्मीय धारिता, वोल्ट्जमेन नियतांक, तथा एन्ट्रॉपी
$[M^0L^0T^1]$	$\sqrt{l/g}, \sqrt{m/k}, \sqrt{R/g}$, जहाँ l= लम्बाई, g= गुरुत्वीय त्वरण, m= द्रव्यमान, k= स्प्रिंग नियतांक, R= पृथ्वी की त्रिज्या
$[M^0L^0T^1]$	$L/R, \sqrt{LC}, RC$ जहाँ L= प्रेरकत्व, R= प्रतिरोध, C= धारिता
$[ML^2T^{-2}]$	$I^2Rt, \frac{V^2}{R}t, VIt, qv, LI^2, \frac{q^2}{C}, CV^2$ जहाँ I= धारा, t= समय, q= आवेश,L= प्रेरकत्व, C=धारिता, R= प्रतिरोध

विमीय विश्लेषण के अनुप्रयोग (Applications of Dimensional Analysis)

1. किसी भौतिक राशि का दी हुई मात्रक पद्धति में मात्रक ज्ञात करना :

◈ किसी भौतिक राशि का सूत्र अथवा परिभाषा लिखने के लिये हम इसकी विमायें ज्ञात करते हैं।

◈ विमीय सूत्र में M, L तथा T के स्थान पर आवश्यक पद्धति के मूलभूत मात्रक रखकर उस पद्धति में हम भौतिक राशि का मात्रक ज्ञात कर लेते हैं। फिर भी कभी—कभी इस मात्रक के लिए हम एक विशिष्ट नाम दे देते हैं।

उदाहरण के लिए, कार्य = बल × विरथापन

अत : $[W] = [MLT^2] \times [L] = [ML^2T^2]$

◈ अब CGS पद्धति में इसका मात्रक gcm^2/s^2 है जिसे अर्ग(erg) कहा जाता है। जबकि MKS पद्धति में kgm^2/s^2 होगा जिसे जूल कहते हैं।

2. भौतिक नियताक अथवा गुणांक की विमायें ज्ञात करना :

◈ चूँकि किसी भातिक राशि की विमायें अद्वितीय होती है। अतः हमें सर्वप्रथम ऐसा सूत्र अथवा व्यंजक लिखना चाहिए जिसमें वह नियतांक प्रयुक्त होता हो जिसकी विमा ज्ञात करनी है। तत्पश्चात् उस सूत्र में शेष सभी राशियों की विमाओं को प्रतिस्थापित करके,अज्ञात नियतांक की विमा प्राप्त की जा सकती है।

(i) गुरुत्वाकर्षण नियतांक : न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम से $F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$ अथवा $G = \frac{Fr^2}{m_1m_2}$

रखी भौतिक राशियों की विमायें रखने पर

$$[G] = \frac{[MLT^{-2}][L^2]}{[M][M]} = [M^{-1}L^3T^{-2}]$$

(ii) प्लांक नियतांक :

प्लांक के अनुसार $E = h\nu$ अथवा $h = \frac{E}{\nu}$

◈ सभी भौतिक राशियों की विमायें रखने पर

$$[h] = \frac{|ML^2T^{-2}|}{[T^{-1}]} = [ML^2T^{-1}]$$

(iii) श्यानता गुणांक :

पॉइसली सूत्र के अनुसार $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi pr^4}{8\eta l}$ अथवा $\eta = \frac{\pi pr^4}{81(dV/dt)}$

सभी भौतिक राशियों की विमायें रखने पर

$$[\eta] = \frac{[ML^{-1}T^{-2}][L^4]}{[L][L^3/T]} = [ML^{-1}T^{-1}]$$

3. किसी भौतिक राशि को एक पद्धति से अन्य पद्धति में बदलना :

◈ भौतिक राशि की माप $P = nu$ नियत होती है।

◈ यदि किसी भौतिक राशि X का विमीय सूत्र $[M^aL^bT^c]$ है तथा यदि भौतिक राशि के(व्युत्पन्न) मात्रक दो पद्धतियों में क्रमशः $[M_1^aL_1^bT_1^c]$ तथा $[M_2^aL_2^bT_2^c]$ हैं तथा n_1 तथा n_2 इन दो पद्धतियों में क्रमशः आंकिक मान हैं तो $n_1[u_1] = n_2[u_2]$

$$\Rightarrow n_1[M_1^aL_1^bT_1^c] = n_2[M_2^aL_2^bT_2^c]$$

$$\Rightarrow n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

जहाँ, M_1, L_1 तथा T_1 प्रथम(ज्ञात) पद्धति में द्रव्यमान, लम्बाई तथा समय के मूल मात्रक हैं तथा M_2, L_2 तथा T_2 द्वितीय(अज्ञात) पद्धति में द्रव्यमान,लम्बाई तथा समय के मूल मात्रक है।

◈ अतः दोनों पद्धतियों में मूल मात्रकों के मान ज्ञात होने पर तथा प्रथम पद्धति में आंकिक मान ज्ञात होने पर अन्य पद्धति में आंकिक मान ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण:

(i) न्यूटन का डाइन में रूपान्तरण

◈ बल का SI मात्रक न्यूटन है तथा इसका विमीय सूत्र $[MLT^{-2}]$ है।

अतः : $1N = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/sec}^2$

$n_2 = n_1 \left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b \left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$ का प्रयोग करणे पर

$= 1\left[\frac{\text{kg}}{\text{gm}}\right]^1 \left[\frac{\text{m}}{\text{cm}}\right]^1 \left[\frac{\text{scc}}{\text{scc}}\right]^{-2}$

$= 1\left[\frac{10^3\text{gm}}{\text{gm}}\right]^1 \left[\frac{10^2\ \text{cm}}{\text{cm}}\right]^1 \left[\frac{\text{scc}}{\text{sec}}\right]^{-2} = 10^5$

$\therefore 1N = 10^5$ डाइन

(ii) गुरुत्वाकर्षण नियतांक (G) को CGS से MKS पद्धति में बदलना

◈ CGS पद्धति में G का मान 6.67×10^{-8}CGS मात्रक होता है जबकि इसका विमीय सूत्र $[M^{-1}L^3T^2]$ है

अतः $G = 6.67 \times 10^{-8}\ \text{cm}^3/\text{gs}^2$

$n_2 = n_1 \left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b \left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$ का प्रयोग करने पर

$= 6.67 \times 10^{-8}\left[\frac{\text{gm}}{\text{kg}}\right]^{-1} \left[\frac{\text{cm}}{\text{m}}\right]^3 \left[\frac{\text{sec}}{\text{sec}}\right]^{-2}$

$= 6.67 \times 10^{-8}\left[\frac{gm}{10^3 gm}\right]^{-1} \left[\frac{cm}{10^2 cm}\right]^3 \left[\frac{sec}{sec}\right]^{-2}$

$= 6.67 \times 10^{-11}$

$\therefore G = 6.67 \times 10^{-11}$MKS मात्रक

(4) दीये गये भौतिक सम्बंध की विमीय रूप से सत्यता की जाँच करना :

◈ यह "विमीय ऐक्यता के सिद्धांत" पर आधारित है। इस सिद्धांत के अनुसार समीकरण के दोनों ओर के प्रत्येक पदों की विमायें अवश्य समान होनी चाहिए।

यदि $X = A \pm (BC)^2 \pm \sqrt{DEF}$, तो विमीय समांगता के सिद्धान्त से

$[X] = [A] = [(BC)^2] = [\sqrt{DEF}]$

◈ यदि दोनों ओर के प्रत्येक पद की विमायें समान हैं तो समीकरण विमीय रूप से शुद्ध होगा अन्यथा नहीं। विमीय रूप से शुद्ध समीकरण आंकिक रूप से शुद्ध हो सकता है और नहीं भी।

उदाहरण :

(i) $\boldsymbol{F = mv^2/r^2}$

◈ उपरोक्त सम्बन्ध में भौतिक राशियों की विमायें रखने पर

$[MLT^{-2}] = [M][LT^{-1}]^2/[L]^2$ अर्थात्

$[MLT^{-2}] = [MT^{-2}]$

चूँकि उपरोक्त समीकरण में दोनों ओर की विमायें समान नहीं हैं; यह सूत्र विमीय रूप से शुद्ध नहीं है, अतः भौतिक रूप से भी शुद्ध नहीं हो सकता।

(ii) $\boldsymbol{s = ut - (1/2)at^2}$

उपरोकत सम्बन्ध में भौतिक राशियों की विमायें रखने पर -

$[L] = [LT^{-1}][T] - [LT^{-2}][T^2]$

अर्थात $[L] = [L] - [L]$

◈ चूँकि उपरोक्त समीकरण में दोनों ओर प्रत्येक पद की विमायें समान है। अतः यह समीकरण विमीय रूप से शुद्ध है। अतः यह समीकरण आंकिक रूप से भी शुद्ध है जबकि गति के समीकरण से हम जानते हैं कि $s = ut + (1/2)at^2$ होता है।

(5) नये सम्बन्धों की स्थापना करना :

◈ यदि किसी भौतिक राशि की अन्य राशियों पर निर्भरता ज्ञात हो और यदि निर्भरता गुणनफल प्रकार की हो, तो विमीय विश्लेषण का उपयोग करके, राशियों के मध्य सम्बन्ध स्थापित किया जा सकता है।

उदाहरण :

(i) सरल लोलक का आवर्तकाल

◈ माना सरल लोलक का आवर्तकाल, गोलक के द्रव्यमान (m), प्रभावी लम्बाई (l), गुरुत्वीय त्वरण (g) पर निर्भर करता है तथा यह मानकर कि फलन m,l तथा g के घात फलनों के गुणनफल प्रकार का है।

अर्थात् $T = Km^x l^y g^z$; जहाँ $K =$ विमाहीन नियतांक

◈ यदि उपरोक्त सम्बन्ध विमीय रूप से शुद्ध है तो राशियों की विमायें इस समीकरण में रखने पर -

$[T] = [M]^x[L]^y[LT^{-2}]^z$ अथवा

$[M^0L^0T^1] = [M^x L^{y+z}T^{-2z}]$

◈ समान राशियों की घातों की तुलना करने पर

$x = 0, y = 1/2$ तथा $z = -1/2$

अतः भौतिक सम्बन्ध $T = K\sqrt{\frac{l}{g}}$

◈ विमाहीन नियतांक का मान प्रयोगों से (2π) पाया जाता है।

अतः $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}}$

(ii) स्टोक का नियम :

◈ जब एक छोटा गोला किसी तरल में से कम चाल से गुजरता है तो श्यान बल F, गति का विरोध करता है, यह प्रायोगिक रूप से त्रिज्या r, गोले के वेग v तथा तरल की श्यानता η पर निर्भर करता है।

अतः F = f(η,r,v)

◈ यदि फलन η,r तथा v के घात फलन का गुणनफल हो तो

$F = K\eta^x r^y v^z$;   जहाँ K = विमाहीन नियतांक

◈ यदि उपरोक्त सम्बन्ध विमीय रूप से शुद्ध है तो

$[MLT^{-2}] = [ML^{-1}T^{-1}]^x[L]^y[LT^{-1}]^z$ अथवा

$[MLT^{-2}] = [M^x L^{-x+y+z}T^{-x-z}]$

◈ समान राशियों की घातों की तुलना करने पर

x = 1; -x+y+z = 1 तथा -x-z = -2

x,y और z, के लिए इन समीकरणों को हल करने पर

x = y = z = 1

अतः समीकरण (i) से F = Kηrv

प्रायोगिक आधार पर K = 6π,

अतः F = 6πηrv यही स्टोक का नियम है।

विमीय विश्लेषण की सीमायें (Limitations of Dimensional Analysis)

◈ यद्यपि विमीय विश्लेषण बहुत उपयोगी है लेकिन इसकी भी कुछ सीमायें हैं-

(1) यदि किसी भौतिक राशि की विमायें दी हैं, तो वह राशि अद्वितीय नहीं हो सकती क्योंकि कई भौतिक राशियों की विमायें समान होती हैं। उदाहरण के लिए, यदि किसी भौतिक राशि का विमीय सूत्र $[ML^2T^{-2}]$ है तो यह कार्य अथवा ऊर्जा अथवा बल आघूर्ण का विमीय सूत्र हो सकता है।

(2) आंकिक नियतांक $[K]$ जैसे (1/2) 1 अथवा 2π आदि की कोई विमायें नहीं होती अतः इन्हें विमीय विश्लेषण विधि द्वारा ज्ञात नहीं किया जा सकता।

(3) विमीय विधि का प्रयोग गुणनफल से प्राप्त होने वाले अन्य फलनों के अतिरिक्त फलनों को व्युत्पन्न करने के लिये नहीं किया जा सकता है जैसे $s = ut + (1/2)at^2$ अथवा $y = a\sin\ \omega t$
को इस विधि द्वारा व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता, परन्तु इन समीकरणों की सत्यता की जाँच की जा सकती है।

(4) यदि यांत्रिकी में कोई भौतिक राशि तीन से अधिक राशियों पर निर्भर करती है तो विमीय विश्लेषण की विधि से सूत्र को व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता क्योंकि इस स्थिति में बनने वाले समीकरणों की संख्या (=3) अज्ञात चरों (>3) की तुलना में कम होती है। फिर भी हम दिये गये समीकरण की सत्यता की जाँच कर सकते हैं।

◈ उदाहरण के लिए, $T = 2\pi\sqrt{1/\text{mgl}}$ को विमीय विश्लेषण विधि से व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता लेकिन इसकी विमीय रूप से सत्यता की जाँच की जा सकती है।

(5) यदि कोई भौतिक राशि तीन भौतिक राशियों पर निर्भर करती है, और उनमें से दो की विमायें समान हों तो विमीय विश्लेषण विधि से इसके लिए सूत्र व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता।

◈ उदाहरण के लिए, स्वरित्र की आवृत्ति के लिए सूत्र $f = (d/L^2)v$, विमीय विधि से व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता। परन्तु इसकी सत्यता की जाँच की जा सकती है।

मापन में यथार्थता और त्रुटि (Accuracy and Error in Measurements)

सार्थक अंक (Significant Figures)

◈ किसी भौतिक राशि के मापन में सार्थक अंक उन अंकों की संख्या बताते हैं जिनमें हम पूर्ण आश्वस्त होते हैं। मापन में अधिक संख्या में सार्थक अंक प्राप्त होना, मापन में अधिक शुद्धता को दर्शाता है। इसका विलोम भी सत्य है।

◈ दी गई राशि के मापन में सार्थक अंकों की संख्या ज्ञात करते समय निम्न नियमों को ध्यान में रखें

(1) सभी अशून्य अंक सार्थक होते हैं।

◈ **उदाहरण :**
42.3 में तीन सार्थक अंक हैं।
243.4 में चार सार्थक अंक हैं।
24.123 में पाँच सार्थक अंक हैं।

(2) दो अशून्य अंकों के बीच आने वाला शून्य अंक सार्थक अंक होता है।

◈ **उदाहरण :**
5.03 में तीन सार्थक अंक हैं।
5.604 में चार सार्थक अंक हैं।
4.004 में चार सार्थक अंक हैं।

(3) संख्या के बायीं ओर के शून्य कभी सार्थक अंक नहीं होते।

◈ **उदाहरण :**
0.543 में तीन सार्थक अंक होगें।
0.045 में दो सार्थक अंक हैं।
0.006 में एक सार्थक अंक है।

(4) संख्या के दायीं ओर के शून्य सार्थक अंक होते हैं।

◈ **उदाहरण :**
4.330 में चार सार्थक अंक होंगे।
433.00 में पाँच सार्थक अंक हैं।
343.000 में छ: सार्थक अंक हैं।

(5) चरघातांकी निरूपण में, दी गई संख्या का आंकिक भाग ही सार्थक अंक बताता है।

◈ **उदाहरण :**
1.32×10^{-2} में तीन सार्थक अंक हैं।
1.32×10^{4} में तीन सार्थक अंक हैं।

राशि को निश्चित सार्थक अंकों में व्यक्त करना

◈ किसी दी गई राशि को निश्चित सार्थक अंकों वाली राशि में व्यक्त करने के निम्नलिखित नियम है।

(1) यदि निश्चित सार्थक अंकों के बाद छोड़ी जाने वाली संख्या 5 से कम होती है, तो उसके पूर्व की संख्या को अपरिवर्तित रहने देते हैं।
उदाहरण : x=7.82 को दो सार्थक अंकों में x=7.8 लिख सकते हैं। इसी प्रकार x=3.94 को दो सार्थक अंकों में x=3.9 लिखा जा सकता है।

(2) यदि छोड़ी जाने वाली संख्या 5 से अधिक होती है तो उसके पूर्व की संख्या को एक से बढ़ा देते हैं।
उदाहरण : x=6.87 को दो सार्थक अंकों में x=6.9 लिख सकते हैं। इसी प्रकार x=12.78 को x=12.8 लिखा जा सकता है।

(3) यदि छोड़ी जाने वाली संख्या 5 है तथा उसके बाद कोई अशून्य संख्या आती है. तो उसके पूर्व की संख्या को एक से बढ़ा देते है।
उदाहरण : x=16.351 को दो सार्थक अंको में x=16.4 लिख सकते हैं। इसी प्रकार x=6.758 को x=6.8 लिखा जा सकता है।

(4) यदि छोड़ी जाने वाली संख्या 5 है तथा उसके बाद कोई शून्य आता है तो उसके पूर्व की संख्या को अपरिवर्तित रहने देते हैं यदि यह सम संख्या है।
उदाहरण : x=3.250 को दो सार्थक अंकों में x=3.2 लिख सकते हैं। इसी प्रकार x=12.650 को 12.6 लिखा जा सकता है।

(5) यदि छोड़ी जाने वाली संख्या 5 है तथा उसके बाद कोई शून्य आता है तो उसके पूर्व की संख्या को एक से बढ़ा देते हैं यदि यह विषम संख्या है।

उदाहरण : x=3.750 को दो सार्थक अंकों में x=3.8 लिख सकते हैं।

इसी प्रकार x=16.150 को x=16.2 लिखा जा सकता है।

गणना में सार्थक अंक

◈ बहुत से प्रयोगों में अंतिम परिणाम प्राप्त करने के लिए विभिन्न प्रेक्षणों का आपस में जोड़, घटाव, गुणा अथवा भाग करना पड़ता है चूँकि प्रत्येक प्रेक्षण की शुद्धता का स्तर समान नहीं होता। अतः परिणाम की शुद्धता के बारे में कहा जा सकता है कि यह सबसे कम शुद्ध मापन से से अधिक शुद्ध नहीं हो सकती अतः किसी भी गणना में सही सार्थक अंक प्राप्त करने के लिए निम्न नियम ध्यान में रखने चाहिए।

(1) राशियों को जोड़ने अथवा घटाने पर प्राप्त फल में दशमलव के बाद कुल उतने ही अंक होने चाहिए जितने कि जोड़ने अथवा घटाने वाली किसी राशि में दशमलव के बाद कम से कम अंक होते हैं।

(i) 33.3 ← (केवल एक दशमलव स्थान रखता है)
3.11
+0.313
―――――
36.723 ← (उत्तर एक दशमलव स्थान तक होना चाहिए)
―――――
उत्तर = 36.7

(ii) 3.1421
0.241
+0.09 ← (2 दशमलव स्थान रखता है)
―――――
3.4731 ← (उत्तर भी 2 दशमलव स्थान तक लिखा जाना चाहिए)
―――――
उत्तर = 3.47

(iii) 62.831 ← (3 दशमलव स्थान रखता है)
-24.5492
―――――
38.2818 ← (उत्तर 3 दशमलव स्थान तक लिखा जाना चाहिए)
―――――
उत्तर = 38.282

(2) दो मापी गई राशियों के गुणनफल अथवा भागफल में कुल उतने ही सार्थक अंक होते हैं जितने कि कम से कम किसी दी गई राशि में हैं। इस नियम को निम्न उदाहरणों से समझा जा सकता है।

(i) 142.06
× 0.23 ← (दो सार्थक अंक)
―――――
32.6738 ← (उत्तर में दो सार्थक अंक होना चाहिए)
―――――
उत्तर = 33

(ii) 51.028
× 1.31 ← (तीन सार्थक अंक)
―――――
66.84668
―――――
उत्तर = 66.8

(iii) $\frac{0.90}{4.26} = 0.2112676$
उत्तर = 0.21

मापन की सार्थकता :

◈ मापन की सार्थकता मापन उपकरण के अल्पतमांक पर निर्भर करती है। जितना छोटा अल्पतमांक होगा, उतना ही सार्थक मापन होगा।

मापन की शुद्धता :

◈ मापन की शुद्धता (यदि कोई त्रुटि हो) इसके सार्थक अंकों की संख्या पर निर्भर है। सार्थक अंकों की संख्या अधिक होने पर, शुद्धता अधिक होती है। यदि किसी मापन में कोई त्रुटि न हो, तो यह मापन सर्वाधिक शुद्ध होता है।

उदाहरण : यदि लम्बाई का वास्तविक मान 5.764 मी. तब
(i) अल्पतमांक = 0.1 सेमी उपकरण द्वारा ज्ञात मान, 5.6 सेमी
(ii) अल्पतमांक = 0.01 सेमी उपकरण द्वारा ज्ञात मान, 5.45 सेमी

निस्कर्ष = प्रथम मापन के द्वारा अधिक शुद्ध परन्तु कम सार्थक और द्वितीक मापन के द्वारा कम शुद्ध लेकिन अधिक सार्थक अंक प्राप्त होते है।

परिमाण की कोटि

◈ संख्याओं के वैज्ञानिक निरुपण में संख्याओं को $M \times 10^x$ के रूप में व्यक्त किया जाता है। जहाँ M,1 व 10 के बीच संख्या है तथा x पूर्णांक है। राशि के परिमाण की कोटि 10 की घात के रूप में होगी।

◈ संक्षिप्तिकरण (Rounding off) करते समय हम अंतिम अंक जो 5 से कम है को छोड़ देते हैं। यदि अंतिम अंक 5 अथवा 5 से अधिक हो, तो उसके पूर्व के अंक को 1 से बढ़ा देते हैं। उदाहरण के लिए.

(1) निर्वात में प्रकाश का वेग $= 3 \times 10^8\ \mathrm{ms^{-1}} \approx 10^8\ \mathrm{m/s}$ (चूँकि 3 < 5)

(2) इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान $= 9.1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \approx 10^{-30}\ \mathrm{kg}$ (चूँकि 9.1 > 5)

मापन में त्रुटियाँ

- मापन प्रक्रिया आवश्यक रूप से एक तुलनात्मक प्रक्रिया है। हमारे बहुत प्रयासों के बावजूद किसी राशि का मापा गया मान, वास्तविक मान अथवा सत्यमान से कुछ न कुछ भिन्न प्राप्त होता है। वास्तविक मान तथा प्रायोगिक मान का यह अन्तर ही मापन में त्रुटि कहलाता है।

(1) निरपेक्ष त्रुटि : किसी भौतिक राशि के मापन में निरपेक्ष त्रुटि, भौतिक राशि के वास्तविक मान तथा मापे गये मान के अन्तर के परिमाण के बराबर होती है।

- माना एक भौतिक राशि को n बार मापा जाता है तथा इसके मापे गये मान $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ हैं। तो इन मानों का समान्तर माध्य $a_m = \frac{a_1+a_2+\cdots\ldots+a_n}{n}$
- सामान्यतः a_m को राशि का वास्तविक मान माना जाता है।
- परिभाषा से मापे गये मानों में निरपेक्ष त्रुटि निम्न होगी -

$\Delta a_1 = a_m - a_1$

$\Delta a_2 = a_m - a_2$

… … … …

$\Delta a_n = a_m - a_n$

- निरपेक्ष त्रुटि किसी रिथति में धनात्मक तथा अन्य स्थिति में ऋृणात्मक हो सकती हैं।

(2) माध्य निरपेक्ष त्रुटि : यह किसी राशि के मापन में प्राप्त सभी प्रेक्षणों की निरपेक्ष त्रुटियों के परिमाणों का समान्तर माध्य होती है। यह $\overline{\Delta a}$ से प्रदर्शित की जाती है। अतः

$$\overline{\Delta a} = \frac{|\Delta a_1| + |\Delta a_2| + \cdots \ldots |\Delta a_n|}{n}$$

- अतः मापन का अंतिम परिणाम निम्न प्रकार लिखा जा सकता है $a = a_m \pm \overline{\Delta a}$
- इससे यह प्रदर्शित होता है कि किसी भी राशि का मापन $(a_m + \overline{\Delta a})$ तथा $(a_m - \overline{\Delta a})$ के बीच होता है।

(3) आपेक्षिक त्रुटि अथवा भिन्नात्मक त्रुटि : किसी मापन में आपेक्षिक त्रुटि अथवा भिन्नात्मक त्रुटि, माध्य निरपेक्ष त्रुटि तथा मापी गई राशि के माध्य मान का अनुपात होती है। अतः

- आपेक्षिक त्रुटि अथवा भिन्नात्मक त्रुटि $= \frac{\text{माध्य निरपेक्ष त्रुटि}}{\text{माध्यमान}} = \frac{\overline{\Delta a}}{a_m}$

(4) प्रतिशत त्रुटि : जब आपेक्षिक अथवा भिन्नात्मक त्रुटि को प्रतिशत में व्यक्त किया जाये तो यह प्रतिशत त्रुटि कहलाती है। अतः प्रतिशत त्रुटि $= \frac{\overline{\Delta a}}{a_m} \times 100\%$

त्रुटियों का संयोजन

(1) राशियों के योग में त्रुटि :

- माना $x = a + b$
- माना $\Delta a = a$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta b = b$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta x = x$ अर्थात् a व b के योग की गणना में निरपेक्ष त्रुटि

x में अधिकतम निरपेक्ष त्रुटि $\Delta x = \pm(\Delta a + \Delta b)$

x के मान में प्रतिशत त्रुटि $x = \frac{(\Delta a+\Delta b)}{a+b} \times 100\%$

(2) राशियों के अन्तर में त्रुटि :

- माना $x = a - b$
- माना $\Delta a = a$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि,

$\Delta b = b$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta x = x$ अर्थात् a व b के अन्तर की गणना में निरपेक्ष त्रुटि

x में अधिकतम निरपेक्ष त्रुटि $\Delta x = \pm(\Delta a + \Delta b)$

x के मान में प्रतिशत त्रुटि $x = \frac{(\Delta a+\Delta b)}{a-b} \times 100\%$

(3) राशियों के गुणनफल में त्रुटि :

- माना $x = a \times b$
- माना $\Delta a = a$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta b = b$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

x के मापन में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि

$\frac{\Delta x}{x} = \pm\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$

x के मापन में प्रतिशत त्रुटि = (a के मान में प्रतिशत त्रुटि) + (b के मान में प्रतिशत त्रुटि)

(4) राशियों के विभाजन में त्रुटि :

- माना $x = \frac{a}{b}$
- माना $\Delta a = a$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta b = b$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta x = x$ अर्थात् a तथा b के भाग की गणना में निरपेक्ष त्रुटि x में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि $\frac{\Delta x}{x} = \pm\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$

x के मान में प्रतिशत त्रुटि = (a के मान में प्रतिशत त्रुटि) + (b के मान में प्रतिशत त्रुटि)

(5) घातीय फलनों में त्रुटि :

- माना $x = \frac{a^n}{b^m}$
- माना $\Delta a = a$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta b = b$ के मापन में निरपेक्ष त्रुटि

$\Delta x = x$ की गणना में निरपेक्ष त्रुटि

x में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि $\frac{\Delta x}{x} = \pm\left(n\frac{\Delta a}{a} + m\frac{\Delta b}{b}\right)$

x के मान में प्रतिशत त्रुटि $= n$ (a के मान में प्रतिशत त्रुटि) $+m$ (b के मान में प्रतिशत त्रुटि)

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

- भारत में भार तथा मापन के मानक निर्धारण के नियम 1976 में प्रतिपादित हुए। इसमें तकनीक, व्यापार, उद्योग तथा विज्ञान की सभी शाखाओं के क्षेत्र में SI पद्धति के प्रयोग को स्वीकृत किया गया।
- अनेक भौतिक राशियों की विमायें मुख्यतः ऊष्मा, ऊष्मागतिकी, विद्युत धारा तथा चुम्बकत्व राशियों की विमायें केवल द्रव्यमान, लम्बाई, व समय के पदों में अर्थहीन हाती हैं। अतः SI पद्धति में 7 मूल मात्रकों को स्वीकृत किया गया।
- किसी भौतिक राशि की विमाओं को आधारभूत मात्रक (केवल मूल मात्रक ही नहीं) की घातों के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है, जोकि उस राशि के व्युत्पन्न मात्रक को भी अभिव्यक्त करते हैं।
- किसी राशि के विमीय सूत्र द्वारा उस भौतिक राशि के मात्रक को मूल मात्रकों के पदों में प्रदर्शित किया जा सकता है।

- किसी भौतिक राशि की विमायें मात्रकों की पद्धति पर निर्भर नहीं करती।
- वह भौतिक राशि जिसका कोई मात्रक न हो, विमाहीन राशि होती है।
- शुद्ध आंकिक संख्याऐं विमाहीन होती हैं।
- सामान्यतया उन मूल मात्रकों के प्रतीकों को, जिसकी विमा (घात) विमीय सूत्र में शून्य होती है, विमीय सूत्र से हटा दिया जाता है।
- वे भौतिक राशियों जो दो समान राशियों के अनुपात के रूप में अभिव्यक्त की जाली हैं, विमाहीन राशियाँ होती हैं।
- भौतिक संबंध जैसे लघुगणक, चरघातांकी, त्रिकोणमितीय अनुपात, आंकिक गुणक इत्यादि को विमीय विश्लेषण विधि की सहायता से ज्ञात नहीं किया जा सकता।
- उन भौतिक संबंधों को जिनमें योग अथवा व्यवकलन के चिन्ह होते हैं विमीय विश्लेषण विधि से ज्ञात नहीं किया जा सकता।
- यदि दो भौतिक राशियों की विमायें अथवा मात्रक समान हैं, तो यह आवश्यक नहीं है कि उनके भौतिक अभिलक्षण भी समान हों।
- उदाहरण के लिए बल आघूर्ण तथा कार्य के मात्रक तथा विमायें समान हैं, परंतु उनके भौतिक अभिलक्षण भिन्न है।
- मानक मात्रक, स्थान तथा समय के साथ परिवर्तित नहीं होना चाहिए। इसी कारण लंबाई तथा समय को परमाण्वीय मानकों के अनुसार परिभाषित किया गया है तथा द्रव्यमान को भी परमाण्वीय मानकों के पदों में परिभाषित करने के प्रयास किए जा रहे हैं।
- पुनर्घटित होने वाली घटना जैसे दोलन करता हुआ लोलक, पृथ्वी का अपनी धुरी पर चक्रण इत्यादि समय को मापने में प्रयुक्त हो सकते हैं।
- किसी भौतिक राशि के आंकिक मान (n) तथा इसके मात्रक (U) का गुणनफल नियत रहता है
  अर्थात् $nU =$ नियतांक अथवा $n_1U_1 = n_2U_2$
- किसी भौतिक राशि के आंकिक मान (n) तथा मात्रक (U) के गुणनफल को उस भौतिक राशि का परिमाण कहते हैं
  अतः परिमाण $= nU$
- पाइसली (श्यानता का मात्रक) = पास्कल (दाब का मात्रक) × सेकण्ड अर्थात् : $PI = P_o \times$ सेकण्ड
- किसी लैंस की शक्ति का मात्रक (डायोप्टर) स्वयं लैंस से अपरिवर्तित होने वाली किरणों को अभिसारित अथवा अपसारित करने की क्षमता को प्रदर्शित करता है।
- किसी राशि के परिमाण की कोटि का अर्थ है कि इसका मान (10 की घात के पदों में) उस राशि के वास्तविक मान के लगभग बराबर होता है।
- 'कोण' भौतिक राशियों में अपवाद है जो कि यद्यपि यह दो समान भौतिक राशियों का अनुपात (कोण = चाप / त्रिज्या) है, परंतु फिर भी इसका एक मात्रक (डिग्री अथवा रेडियन) होता है तथा कोण को इसके आंकिक मान के साथ इसके मात्रक द्वारा दर्शाया जाता है।

उदाहरण

1. विमीय विधि से समीकरण $v^2 = u^2 + 2ax$ के सत्यता की जाँच कीजिये।

हल:

- इस समीकरण में कुल लीन पद है- v^2, u^2 तथा 2 ax
- यह समीकरण सही हो सकता है यदि इन तीनों पदों की विमायें बराबर हो।

$$[v^2] = \left[\frac{L}{T}\right]^2 = L^2\,T^{-2}$$

$$[u^2] = \left[\frac{L}{T}\right]^2 = L^2\,T^{-2}$$

$$[2ax] = [a][x] = \left[\frac{L}{T^2}\right]L = L^2\,T^{-2}$$

अतः समीकरण सही होगा।

2. पारा का घनत्व 13.6 ग्राम/सेमी ^{3} है। यदि द्रव्यमान को किग्रा तथा लम्बाई को मीटर में मापा जाये तो इस नये मात्रक पद्धति में पारे के घनत्व का मान क्या होगा?

हल:

- घनत्व की विमा $= [ML^{-3}]$
- माना $M_1,\ L_1$ क्रमशः ग्राम तथा सेमी को और $M_2,\ L_2$ क्रमशः किग्रा तथा मीटर को व्यक्त कर रहे हैं। इन पद्धतियों में घनत्व का मात्रक क्रमशः $[M_1\ L_1^{-3}]$ एवं $[M_2\ L_2^{-3}]$ होगा। यदि संख्यात्मक मान n_1 तथा n_2 हो तो

$$n_1[M_1\ L_1^{-3}] = n_2[M_2\ L_2^{-3}]$$

$$\text{या}\quad n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^{-3}$$

$$\text{यहाँ}\quad n_1 = 13.6$$

$$\therefore\ n_2 = 13.6\left[\frac{\text{ग्राम}}{\text{किग्रा}}\right]\left[\frac{\text{सेमी}}{\text{मीटर}}\right]^{-3}$$

$$= 13.6\left[\frac{\text{ग्राम}}{1000\ \text{ग्राम}}\right]\left[\frac{\text{सेमी}}{100\ \text{सेमी}}\right]^{-3}$$

$$n_2 = \frac{13.6 \times (100)^3}{1000} = 13.6 \times 10^3$$

$\therefore$ पारे का घनत्व $= 13.6 \times 10^3$ किग्रा/मीटर ^{3}

3. एक तनी हुई धारो या रस्सी की आवृत्ति के लिए व्यंजक प्राप्त करें यदि आवृति (n) रस्सी में लगने वाले तनाव T, रस्सी की लम्बाई l एवं प्रति इकाई लम्बाई के द्रव्यमान m पर निर्भर करती है।

हल:

- विमीय विश्लेषण विधि द्वारा हम लिख सकते हैं-

$$n \propto (T)^a (l)^b (m)^c$$

या

$$n = k\,T^a l^b\,m^c \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

- जहाँ k एक विमाहीन नियतांक है एवं a, b, c राशियों के घात है जिन्हें निकालना है। दोनों तरफ विमा लेने पर,

$$[T^{-1}] = [MLT^{-2}]^a[L]^b[ML^{-1}]^c$$

$$\text{या}\ [M^0L^0T^{-1}] = [M^{a+c}L^{a+b-c}T^{-2a}]$$

- चूँकि बांये पक्ष की विमा एवं दायें पक्ष की विमा समान होनी चाहिये
- अत:
$$a+c=0$$
$$a+b-c=0$$
$$-2a=-1$$
- इन समीकरणों को हल करने पर,
$a=\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{2}$ तथा $b=-1.$
- इनका मान समीकरण (i) में रखने पर,
$$n=k(T)^{1/2}(l)^{-1}(m)^{-1/2}$$
या $$n=\frac{k}{l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$
- k का मान प्रयोगों द्वारा ज्ञात किया जाता है जो 1/2 होता है।
$\therefore\ n=\frac{1}{2l}\sqrt{\left(\frac{T}{m}\right)}$

4. किसी कण की स्थिति x, समय t पर समीकरण $x=at+bt^2$ के अनुसार निर्भर करती है, जहाँ x मीटर में हैं तथा t सेकण्ड में हैं। a तथा b की विमाएँ व मात्रक ज्ञात कीजिये। ये मात्रक किन-किन भौतिक राशियों को बताते हैं?

हल:
- समीकरण $x=at+bt^2$ में बाये पद x की विमा [L] है। अतः दोनों दायें पदों at व bt^2 की विमायें भी [L] ही होंगी।
$\therefore$ a की विमा $=\frac{\text{at की विमा}}{\text{t की विमा}}=\frac{[L]}{[T]}=[LT^{-1}]$
- अतः a का मात्रक 'मीटर-सेकेण्ड $^{-1}$' अथवा मीटर/सेकण्ड होगा तथा यह भौतिक राशि 'चाल' है।
इसी प्रकार,
- b की विमा $=\frac{bt^2 \text{ की विमा}}{t^2 \text{ की विमा}}=\frac{[L]}{[T^2]}=[LT^{-2}]$
- अतः b का मात्रक 'मीटर/सेकण्ड ^{2}' होगा तथा यह भौतिक राशि 'त्वरण' है।

5. वान्डरवाल गैस समीकरण $\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$ में नियतांकों a व b की विमाये ज्ञात कीजिये।

हल:
- दी गई समीकरण में P, V व T क्रमश: दाब, आयतन व ताप है। चूँकि समान विमाओं वाली राशियों को ही जोड़ा अथवा घटाया जा सकता है, अत: राशि a/v^2 की विमा वही होगी जो कि p (दाब) की-विमा है तथा b की-विमा वही होगी जो v (आयतन) की विमा है।
- अत:
$\frac{a}{V^2}$ की विमा $=$ P की विमा
- अथवा
a की विमा $=P$ की विमा $\times V^2$
$=[ML^{-1}T^{-2}][L^6]$
$=[ML^5T^{-2}]$
- इसी प्रकार,
b की विमा $=V$ की
$=[L^3]$

6. निम्नलिखित राशियों के विमीय सूत्र ज्ञात करें
(a) आवेश Q ,
(b) विभव V,
(c) धारिता (Capacitance) C,
(d) प्रतिरोध R
कुछ समीकरण जो इन राशियों से सम्बन्धित होते हैं, नीचे दिये गये हैं-
Q=It, U=VIt, Q=CV तथा V=RI
जहाँ I विद्युत धारा, t समय तथा U ऊर्जा है।

हल: (a) $Q=It$
- इस प्रकार, $[Q]=IT$
(b) $U=VIt$ या
$ML^2\ T^{-2}=[V]IT$ या
$[V]=ML^2I^{-1}\ T^{-3}$
$Q=CV$
(c) $IT=[C]ML^2I^{-1}\ T^{-3}$ या
$[C]=M^{-1}L^{-2}I^2T^4$
(d) $V=RI$ या
$R=\frac{V}{I}$ या
$[R]=\frac{ML^2I^{-1}T^{-3}}{I}=ML^2I^{-2}T^{-3}$

7. किसी वृत्तीय कक्षा में परिभमण करने वाले कण पर लगने वाला अभिकेन्द्र बल F कण के द्रव्यमान m वृत्त की त्रिज्या r तथा कण की चाल v पर निर्भर करता है। विमीय विश्लेषण विधि से अभिकेन्द्र बल F के लिए सूत्र ज्ञात करें।

हल:
- माना कि वृत्तीय कक्षा में परिक्रमण करने वाले कण का अभिकेन्द्र बल F, द्रव्यमान (m) की घात a पर, त्रिज्या (r) की घात b पर तथा चाल (v) की घात c पर निर्भर करता है। तब
$$F\propto m^ar^bv^c$$
$$F=Km^ar^bv^c \text{(i)}$$
अथवा
- जहाँ K एक विमाहीन नियतांक है। दोनों ओर की विमायें लिखने पर
$[MLT\ T^{-2}]=[M]^a[\ L]^b[LT^{-1}]^c$
अथवा $[M^1\ L^1\ T^{-2}]=[M^aL^{b+c}T^{-c}]$
- विमीय संतुलन के लिए, दोनों ओर के पदों की विमाएँ समान होनी चाहिए। अतः दोनों ओर की विमाओं की तुलना करने पर,
- हल करने पर,
$a=1, b+c=1$ तथा $-c=-2$
$a=1, b=-1$ तथा $c=2$
इन मानों को समीकरण (i) में रखने पर
$$F=Kmr^{-1}v^2=K\frac{mv^2}{r}$$
प्रयोगों के आधार पर नियतांक $K=1$
$$\therefore\ F=\frac{mv^2}{r}$$

अभ्यास प्रश्न

1. एक घन के आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल का आंकिक मान समान है। ऐसे एक घन का आयतन होगा–
(a) 216 इकाई (b) 1000 इकाई
(c) 2000 इकाई (d) 3000 इकाई **[d]**

2. ताप को निम्न में से किस व्युत्पन्न मात्रक के रुप में प्रदर्शित किया जा सकता है–
(a) लम्बाई और द्रव्यमान
(b) द्रव्यमान और समय
(c) लम्बाई, द्रव्यमान और समय
(d) उपरोक्त में से कोई नहीं **[d]**

3. यदि मापन की दो पद्धतियों में u_1 व u_2 दो मात्रक चुने गये हैं। तथा उनके आंकिक मान n_1 व n_2 है, तो–
(a) $n_1u_1 = n_2u_2$
(b) $n_1u_1 = n_2 u_2 = 0$
(c) $n_1n_1 = u_2 u_2$
(d) $(n_1+ u_1) = (n_2+u_2)$ **[a]**

4. 1 इलेक्ट्रॉन वोल्ट (1 eV) है–
(a) एक जूल के तुल्य (b) 1.6×10^{-19} J
(c) 1V (d) 1.6×10^{-19}C **[b]**

5. सार्वत्रिक समय आधारित है–
(a) पृथ्वी के अपने अक्ष पर घूर्णन पर
(b) पृथ्वी के सूर्य के चारो ओर अपने कक्ष में घूर्णन पर (कक्षीय गति)
(c) सीजियम परमाणु के कम्पनों पर
(d) क्वार्टज क्रिस्टल के दोलनों पर **[c]**

6. नाभिकीय अनुप्रस्थ काट को बार्न (barn) में मापा जाता है। यह बराबर है–
(a) 10^{-20} मी ^{2} (b) 10^{-30} मी ^{2}
(c) 10^{-28} मी ^{2} (d) 10^{-14} मी ^{2} **[c]**

7. तार का यंग मापांक निर्धारित करने के लिये सूत्र है $Y = \frac{F}{A}.\frac{L}{\Delta L}$, यहाँ L = लम्बाई, A = तार की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल, ΔL = तार की लम्बाई में परिवर्तन जब इसे F बल से खींचा जाता है। इसे CGS पद्धति से MKS पद्धति में बदलने के लिये रुपान्तरण गुणांक है–
(a) 1 (b) 10
(c) 0.1 (d) 0.01 **[c]**

8. सूची-I तथा सूची-II को सुमेलित कीजिये तथा सूची के नीचे दिये गये कोड के आधार पर सही उत्तर का चयन कीजिये–

सूची-I	सूची-II
I जूल	A. हेनरी × ऐम्पियर / सैकण्ड
II वॉट	B. फैरड × वोल्ट
III वोल्ट	C. कूलॉम × वोल्ट
IV कूलॉम	D. ऑर्स्टेड × सेमी
	E. ऐम्पियर × गॉस
	F. (ऐम्पियर)^2 × ओम

कोड
(a) I-A,II-F,III-E,IV-D (b) I-C,II-F,III-A,IV-B
(c) I-C,II-F,III-A,IV-E (d) I-B,II-F,III-A,IV-C **[b]**

9. यदि $x = at + bt^2$, जहाँ x वस्तु के द्वारा किमी में तय की गयी दूरी तथा t सैकण्ड में समय है तब b का मात्रक होगा–
(a) किमी/सैकण्ड (b) किमी-सैकण्ड
(c) किमी / सैकण्ड ^{2} (d) किमी- सैकण्ड ^{2} **[c]**

10. दिये गये समीकरण $\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b) =$ नियतांक में a का मात्रक होगा? (यहाँ P = दाब एवं V = आयतन)
(a) डाइन × सेमी ^{5}
(b) डाइन × सेमी ^{4}
(c) डाइन/सेमी ^{3}
(d) डाइन/सेमी ^{2} **[b]**

11. किस राशि को एकांक क्षेत्रफल पर बल के रुप में व्यक्त कर सकते है–
(a) कार्य (b) दाब
(c) आयतन (d) क्षेत्रफल **[b]**

12. सूची-I तथा सूची-II को सुमेलित कीजिये तथा सूची के नीचे दिये गये कोड के आधार पर सही उत्तर का चयन कीजिये–

सूची-I	सूची-II
(a) पृथ्वी तथा तारों के बीच की दूरी	1. माइक्रॉन
(b) ठोसों में अंतरपरमाण्विक दूरी	2. एंगस्ट्रॉम
(c) नाभिक का आकार	3. प्रकाश वर्ष
(d) अवरक्त लेजर की तरंगदैर्ध्य	4. फर्मी
	5. किलोमीटर

(a) A-5 B-4 C-2 D-1
(b) A-3 B-2 C-4 D-1
(c) A-5 B-2 C-4 D-3
(d) A-3 B-4 C-1 D-2 **[b]**

13. निम्न में से कौनसा सम्बन्ध विमीय रुप से सही है
(a) दाब = प्रति एकांक क्षेत्रफल की ऊर्जा
(b) दाब = प्रति एकांक आयतन की ऊर्जा
(c) दाब = प्रति एकांक आयतन का बल
(d) दाब = प्रति इकाई समय में एकांक आयतन में संवेग **[b]**

14. गैसों का अवस्था समीकरण निम्नलिखित रुप में व्यक्त होता है $\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT$, यहाँ P दाब, आयतन, T परम ताप तथा a, b एवं R नियतांक है। a की विमायें होगी
(a) ML^5T^{-2} (b) $ML^{-1}T^{-2}$
(c) $M^0L^3T^0$ (d) $M^0L^6T^0$ **[a]**

15. यदि C धारिता के संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवान्तर (v) है, तब CV^2 की विमायें हैं?
(a) MLT में व्यक्त नहीं की जा सकती
(b) MLT^{-2}
(c) M^2LT^{-1}
(d) ML^2T^{-2} **[d]**

16. यदि किसी प्रेरक कुण्डली का प्रेरकत्व L है एवं इसमें से i धारा बह रही है, तब Li^2 की विमायें हैं

(a) ML^2T^{-2} (b) MLT में व्यक्त नहीं होगी

(c) MLT^{-2} (d) $M^2L^2T^{-2}$ **[a]**

17. निम्नलिखित में से किसकी विमायें शेष तीन से भिन्न है

(a) प्रति इकाई आयतन में ऊर्जा

(b) प्रति इकाई क्षेत्रफल पर आरोपित बल

(c) विभवान्तर एवं प्रति इकाई आयतन में स्थित आवेश का गुणनफल

(d) प्रति इकाई द्रव्यमान का कोणीय संवेग **[d]**

18. m द्रव्यमान एवं r त्रिज्या की एक गोलीय वस्तु η श्यानता के माध्यम में गिर रही है। वह समय जिसमें वस्तु का वेग शून्य से बढ़कर सीमान्त (टर्मिनल) वेग v का 0.63 गुना हो जाता है, समय नियतांक r कहलाता है। विमीय रुप से τ को किसके द्वारा व्यक्त कर सकते हैं

(a) $\frac{mr^2}{6\pi\eta}$

(b) $\sqrt{\frac{6\pi mr\eta}{g^2}}$

(c) $\frac{m}{6\pi\eta rv}$

(d) उपरोक्त में से कोई नहीं **[d]**

19. निम्नलिखित में से किसकी विमायें समान नहीं है

(a) कार्य तथा ऊर्जा

(b) कोण तथा विकृति

(c) आपेक्षिक घनत्व तथा अपवर्तनांक

(d) प्लांक नियतांक तथा ऊर्जा **[d]**

20. मार्टियन पद्धति में बल (F), त्वरण (a) और समय (T) को मूल भौतिक राशि के रुप में उपयोग करते हैं। लम्बाई की विमायें मार्टियन पद्धति में होंगी

(a) FT^2 (b) $F^{-1}T^2$

(c) $F^{-1}A^2T^{-1}$ (d) AT^2 **[d]**

21. $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ की विमा निम्न में से बराबर है

(a) वेग की विमा के (b) समय की विमा के

(c) धारिता की विमा के (d) दूरी की विमा के **[a]**

22. एक एथलेटिक प्रशिक्षक ने अपनी टीम से कहा कि पेशी (Muscle) गुणा चाल, शक्ति के बराबर है। पेशी की विमा क्या होगी

(a) MLT^{-2} (b) ML^2T^{-2}

(c) MLT^2 (d) L **[a]**

23. निम्न तीन राशियों की विमायें समान हैं

(a) कार्य, ऊर्जा, बल

(b) वेग, संवेग, आवेग

(c) स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा, संवेग

(d) दाब, प्रतिबल, प्रत्यास्थता गुणांक **[d]**

24. प्लांक नियतांक तथा कोणीय संवेग की विमायें क्रमश: होंगी

(a) ML^2T^{-1} तथा MLT^{-1}

(b) ML^2T^{-1} तथा ML^2T^{-1}

(c) MLT^{-1} तथा ML^2T^{-1}

(d) MLT^{-1} तथा ML^2T^{-2} **[b]**

25. यदि M = द्रव्यमान, L = लम्बाई, T = समय तथा I = विद्युत धारा तथा यदि $[\varepsilon_0]$ निर्वात की विद्युतशीलता तथा $[\mu_0]$ निर्वात की चुम्बकशीलता की विमा को प्रदर्शित करें तो M,L,T तथा I के पदों में सही विमीय सूत्र है। जहाँ संकेतों के सामान्य अर्थ हैं

(a) $[\varepsilon_0] = M^{-1}L^{-3}T^2I$ (b) $[\varepsilon_0] = M^{-1}L^{-3}T^4I^2$

(c) $[\mu_0] = MLT^{-2}I^{-2}$ (d) $[\mu_0] = ML^2T^{-1}I$ **[b]**

26. CGS पद्धति में किसी द्रव के घनत्व का मान 0.625 g/cm^3 है, तो SI पद्धति में इसका मान होगा

(a) 0.625 (b) 0.0625

(c) 0.00625 (d) 625 **[d]**

27. सरल लोलक का दोलन काल से $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ दिया जाता है, जहाँ। लगभग 100 cm है तथा न्यूनतम 1 mm तक शुद्धता से मापा जाता है। दोलन काल (T) लगभग 2 सैकण्ड है। यदि 100 दोलनों के समय को उस घड़ी से मापा जाए जिसका अल्पतमांक 0.1 सैकण्ड है, तो g में प्रतिशत त्रुटि होगी

(a) 0.1% (b) 1%

(c) 0.2% (d) 0.8% **[c]**

28. द्रव्यमान तथा चाल के मापन से प्राप्त द्रव्यमान तथा चाल में प्रतिशत त्रुटियाँ क्रमश: 2% तथा 3% हैं। गतिज ऊर्जा की गणना में अधिकतम त्रुटि होगी

(a) 11% (b) 8%

(c) 5% (d) 1% **[b]**

29. यदि वस्तु नियत चाल से (4.0 ± 0.3) sec में (13.8 ± 0.2) m की दूरी तय करती है। त्रुटि की सीमाओं के भीतर वस्तु का वेग होगा

(a) (3.45±0.2) ms^{-1}

(b) (3.45±0.3) ms^{-1}

(c) (3.45±0.4) ms^{-1}

(d) (3.45±0.5) ms^{-1} **[b]**

30. मापन की शुद्धता निर्धारित होती है

(a) निरपेक्ष त्रुटि से

(b) प्रतिशत त्रुटि से

(c) दोनों

(d) उपरोक्त में से कोई नहीं **[b]**

31. गोले की त्रिज्या (5.3 ± 0.1) cm है तो आयतन में प्रतिशत त्रुटि होगी?

(a) $\frac{0.1}{5.3}\times100$ (b) $3\times\frac{0.1}{5.3}\times100$

(c) $\frac{0.1\times100}{3.53}$ (d) $3+\frac{0.1}{5.3}\times100$ **[b]**

32. l लम्बाई के ताँबे के पतले तार के ताप में 10°C की वृद्धि करने पर इसकी लम्बाई में 2% की वृद्धि हो जाती है। यदि ताँबे की वर्गाकार प्लेट (जिसकी भुजा की लम्बाई l है) के ताप में 10°C की वृद्धि कर दी जाए तो इसके क्षेत्रफल में होने वाली प्रतिशत वृद्धि होगी
(a) 4%
(b) 8%
(c) 16%
(d) उपरोक्त में से कोई नहीं **[a]**

33. मापन की शुद्धता तथा परिणाम को व्यक्त करने हेतु सार्थक अंकों के उपयोग की दृष्टि से निम्न में से कौन सा/से कथन सत्य हैं
(1) 50.14 cm तथा 0.00025 ऐम्पियर, मापन में से प्रथम मापन में अधिक शुद्धता होगी
(2) यदि कोई 478 km रेलगाड़ी से तथा 397 m सड़क से यात्रा करता है तो कुल चली गई दूरी 478 km है-
(a) केवल (1) सत्य है
(b) केवल (2) सत्य है
(c) दोनों सत्य है
(d) उपरोक्त में से कोई नहीं **[c]**

34. यदि छड़ A की लम्बाई 3.25 ± 0.01 cm एवं B की लम्बाई 4.19 ± 0.01 cm है तो छड़ A की तुलना में B की लम्बाई कितना अधिक है-
(a) 0.94 $\pm$ 0.00 *cm*
(b) 0.94 $\pm$ 0.01 *cm*
(c) 0.94 $\pm$ 0.02 *cm*
(d) 0.94 $\pm$ 0.005 *cm* **[c]**

35. एक भौतिक राशि $X = M^aL^bT^c$ द्वारा प्रदर्शित है तथा M, L एवं T के मापन में प्रतिशत त्रुटि क्रमशः α,β व γ है, तो γ में अधिकतम प्रतिशत त्रुटि होगी-
(a) $a\alpha + b\beta + c\gamma$
(b) $a\alpha + b\beta - c\gamma$
(c) $\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}$
(d) इनमें से कोई नही **[a]**

36. एक भौतिक राशि A चार प्रक्षेपित राशियों a, b, c एवं d से व्यजंक $A = \frac{a^2b^3}{c\sqrt{d}}$ द्वारा सम्बन्धित है तथा a,b,c व d के मापन की प्रतिशत त्रुटि क्रमशः 1%, 3%, 2% एवं 2% है तो A में प्रतिशत त्रुटि होगी
(a) 12% (b) 7%
(c) 5% (d) 14% **[d]**

37. किसी प्रयोग में सरल लोलक का आवर्तकाल क्रमशः 2.63s, 2.56s, 2.42s, 2.71s तथा 2.80s मापा गया तो औसत निरपेक्ष त्रुटि होगी
(a) 0.1 s (b) 0.11 s
(c) 0.01 s (d) 1.0 s **[b]**

38. एक बेलन की लम्बाई 0.1 cm अल्पतमांक की मीटर छड़ से मापी जाती है। इसका व्यास 0.01 cm अल्पतमांक के वर्नियर कैलीपर्स से मापा जाता है। यदि बेलन की लम्बाई 5.0 cm तथा त्रिज्या 2.0 cm हो तो इसके आयतन की गणना में प्रतिशत त्रुटि होगी
(a) 1% (b) 2%
(c) 3% (d) 4% **[c]**

39. यदि बल (F), लम्बाई (L) तथा समय (T) को मूल-मात्रक माना जाये तो द्रव्यमान का विमीय सूत्र होगा
(a) $FL^{-1}T^2$ (b) $FL^{-1}T^{-2}$
(c) $FL^{-1}T^{-1}$ (d) FL^2T^2 **[a]**

40. सार्वत्रिक गैस नियतांक की विमा है-
(a) $[ML^2T^{-2}\theta^{-1}]$
(b) $[M^2LT^{-2}\theta]$
(c) $[ML^3T^{-1}\theta^{-1}]$
(d) इनमें से कोई नहीं **[a]**

41. दिये गये सम्बन्ध $y = a\cos(\omega t - kx)$ में k का विमीय सूत्र है–
(a) $[M^0L^{-1}T^{-1}]$ (b) $[M^0LT^{-1}]$
(c) $[M^0L^{-1}T^0]$ (d) $[M^0LT]$ **[c]**

42. एक पिण्ड की स्थिति, जो त्वरण 'a' से गतिशील है, व्यंजक $x = Ka^mt^n$ से प्रदर्शित है, जहाँ t समय है। m एवं n की विमा होगी-
(a) m = 1 n = 1
(b) m = 1 n = 2
(c) m = 2 n = 1
(d) m = 2 n = 2 **[b]**

43. समीकरण $W = \frac{1}{2}Kx^2$ में K की विमा होगी-
(a) $M^1L^0T^{-2}$ (b) $M^0L^1T^{-1}$
(c) $M^1L^1T^{-2}$ (d) $M^1L^0T^{-1}$ **[a]**

44. वे भौतिक राशियाँ कौनसी हैं जिनकी विमायें समान नहीं हैं-
(a) चाल तथा $(\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$
(b) बल आघूर्ण तथा कार्य
(c) संवेग तथा प्लांक नियतांक
(d) प्रतिबल तथा यंग प्रत्यास्थता गुणांक **[c]**

♦♦♦♦

02 सदिश (Vectors)

सदिश का परिचय (Introduction of Vector)

- वे भौतिक राशियाँ जिनमें परिमाण व दिशा होती है तथा जो सदिश नियमों का पालन करती हैं, सदिश कहलाती हैं।
- उदाहरण : विस्थापन, वेग, त्वरण, संवेग, बल, आवेग, भार, प्रणोद (thrust) बल आघूर्ण, कोणीय संवेग, कोणीय वेंग आदि।
- यदि किसी भौतिक राशि में परिमाण तथा दिशा दोनों हों तो यह हमेशा ही सदिश नहीं होती। सदिश होने के लिए इसका सदिश बीजगणित नियमों का पालन करना अनिवार्य है।
- उदाहरण : भौतिक राशि 'धारा' में परिमाण तथा दिशा दोनों होते हैं परन्तु फिर भी यह अदिश राशि है क्योंकि यह सदिश बीजगणित नियमों का पालन नहीं करती।

भौतिक राशियाँ (Physical Quantities)

1. अदिश राशियाँ (Scalar Quantities)

- ऐसी भौतिक राशियाँ जिन्हें पूर्णतः व्यक्त करने. के लिए केवल परिमाण व मात्रक की आवश्यकता हो, अदिश राशियाँ कहलाती हैं। उदाहरणः द्रव्यमान, समय, दूरी, आयतन, कार्य, ऊर्जा, घनत्व, धारा, दाब, तापमान आदि।

2. सदिश राशियाँ (Vector Quantities)

- वे भौतिक राशियाँ जिन्हें पूर्णतः व्यक्त करने के लिए, परिमाण, मात्रक के साथ-साथ दिशा की भी आवश्यकता हो, सदिश राशियाँ कहलाती हैं।
  उदाहरणः विस्थापन, वेग, बल, त्वरण, संवेग, बल आघूर्ण, कोणीय संवेग, धारा, घनत्व आदि।

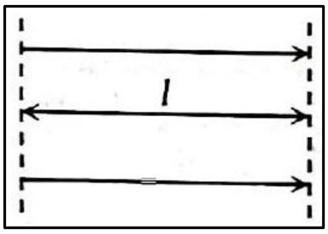
3. प्रदिश राशियाँ (Tensor Quantities)

- वे भौतिक राशियाँ जिनकी स्वयं की कोई दिशा नहीं होती, बल्कि उनके परिमाण भिन्न-भिन्न दिशाओं में भिन्न-भिन्न होते हैं, प्रदिश राशियाँ कहलाती हैं।
  उदाहरणः जड़त्व आघूर्ण।

सदिश के प्रकार (Types of Vector)

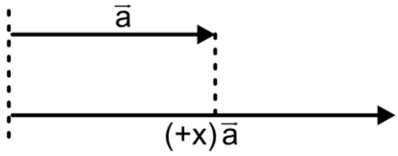
(1) समान सदिश (Equal vector):

- दो सदिश $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ समान सदिश कहलाते हैं यदि इनके परिमाण तथा दिशा दोनों समान हों और वे समान भौतिक राशि को प्रदर्शित करते हैं।



(2) समान्तर सदिश (Parallel vector):

- दो सदिश $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ समान्तर कहलाते हैं यदि

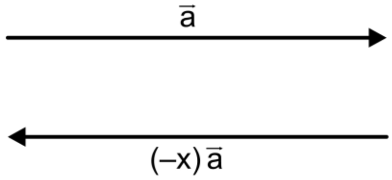


(i) दोनों की दिशायें समान हों।

(ii) एक सदिश, दूसरे सदिश का अदिश (धनात्मक) तथा अशून्य गुणक हो।

(3) प्रति समान्तर सदिश (Anti parallel vector):

- दो सदिश $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ प्रतिसमान्तर सदिश कहलाते हैं यदि



(i) दोनों की दिशायें विपरीत हों।

(ii) एक सदिश, अन्य सदिश में अशून्य तथा ऋणात्मक $(-x)$ संख्या द्वारा गुणा करने से प्राप्त सदिश हो।

(4) संरेखीय सदिश (Collinear vector) :

- एक ही सरल रेखा के अनुदिश या विपरीत दिशा में क्रियाशील सदिश अर्थात् इनके मध्य अन्तरित कोण $0°$ या $180°$ होता है, तो वे संरेखीय सदिश कहलाते हैं।

(5) शून्य सदिश ($\vec{0}$) (Zero vector) :

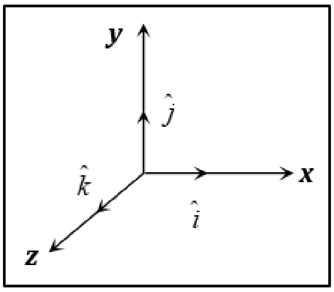
- वह सदिश जिसका परिमाण शून्य तथा दिशा स्वेच्छ हो (हमें ज्ञात न हो) शून्य सदिश कहलाता है।

(6) इकाई सदिश (Unit vector) :

- एक सदिश को इसके परिमाण द्वारा विभाजित करने पर इकाई सदिश प्राप्त होता है। $\vec{A}$ का इकाई सदिश $\hat{A}$ होता है (इसे A कैप या A हैट पढ़ा जाता है) इसका परिमाण इकाई के बराबर होता है।
  चूंकि, $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} \Rightarrow \vec{A} = A\hat{A}$
- अतः हम कह सकते हैं कि इकाई सदिश हमें दिशा का बोध कराता है।

(7) अभिलम्बवत् इकाई सदिश (Orthogonal unit vector) :

- $\hat{i}, \hat{j}$ तथा $\hat{k}$ अभिलम्बवत इकाई सदिश कहलाते हैं।



◈ दाहिने त्रिक का निर्माण करते हैं। (यह एक निर्देशांक पद्धति है, जिसमें हम दायें हाथ की उंगलियों को x से y की ओर मोड़ें तो अंगूठे की दिशा z-अक्ष की ओर होगी।)

$$\hat{\imath} = \frac{\vec{x}}{x}, \hat{\jmath} = \frac{\vec{y}}{y}, \hat{k} = \frac{\vec{z}}{z}$$

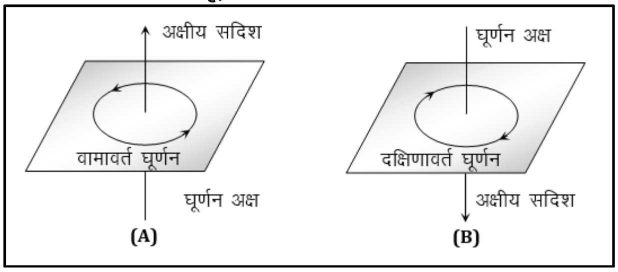
$$\therefore \vec{x} = x\hat{\imath}, \vec{y} = y\hat{\jmath}, \vec{z} = z\hat{k}$$

(8) ध्रुवीय सदिश (Polar vector) :

◈ इनका प्रारम्भिक बिन्दु या कार्यकारी बिन्दु नियत होता है। उदाहरण: विस्थापन तथा बल आदि।

(9) अक्षीय सदिश (Axial vector) :

◈ यह घूर्णी प्रभाव को प्रदर्शित करता है तथा दायें हाथ के पेंच के नियमानुसार हमेशा घूर्णन अक्ष के अनुदिश होता है। उदाहरण : कोणीय वेग, बलआघूर्ण तथा कोणीय संवेग आदि।



(10) समतलीय सदिश (Coplanar vector) :

◈ तीन (या अधिक) सदिश समतलीय सदिश कहलाते हैं यदि ये एक ही तल में स्थित हों। दो (मुक्त) सदिश हमेशा समतलीय होते हैं।

(11) ऋणात्मक सदिश (Negative vector) :

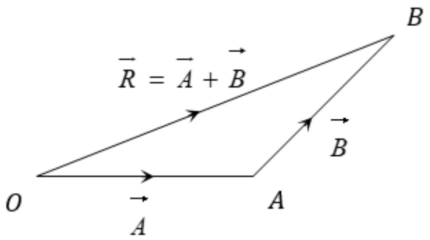
◈ वह सदिश जो दिए गए सदिश से परिमाण में बराबर किन्तु दिशा में विपरीत होता है। वह दिए गए सदिश का ऋणात्मक सदिश कहलाता है।

दो सदिशों के योग का त्रिभुज नियम (Triangle Law of Vector Addition of Two Vectors)

◈ यदि दो अशून्य सदिशों को समान क्रम में ली गयी त्रिभुज की दो भुजाओं द्वारा प्रदर्शित किया जाए तो इनका परिणामी विपरीत क्रम में त्रिभुज की तीसरी भुजा द्वारा प्रदर्शित होगा।

अर्थात् $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

$\because \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

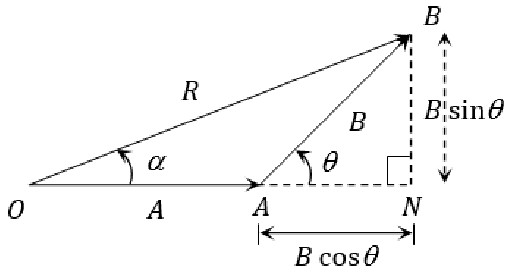


(1) परिणामी सदिश का परिमाण

◈ निम्न चित्र में, $\triangle ABN$ में,

$\cos\theta = \frac{AN}{B} \Rightarrow AN = B\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{BN}{B} \therefore BN = B\sin\theta$



$\triangle OBN$ में, $OB^2 = ON^2 + BN^2$

$$\Rightarrow R^2 = (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$$

$$\Rightarrow \bar{R}^2 = A^2 + B^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2AB\cos\theta$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

(2) परिणामी सदिश की दिशा :

◈ यदि $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण θ हो, तो

$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

यदि $\vec{R}, \vec{A}$ के साथ α कोण बनाये तो $\triangle OBN$ में,

$$\tan\alpha = \frac{BN}{ON} = \frac{BN}{OA + AN}$$

$$\tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$$

सदिशों के योग का समान्तर चतुर्भुज नियम (Parallelogram Law of Vector Addition)

◈ यदि दो अशून्य सदिशों को एक समान्तर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाओं से निरूपित किया जाए, तो उनके उभयनिष्ठ (प्रतिच्छेद) बिन्दु से गुजरने वाला विकर्ण उनके परिणामी सदिश को प्रदर्शित करता है।

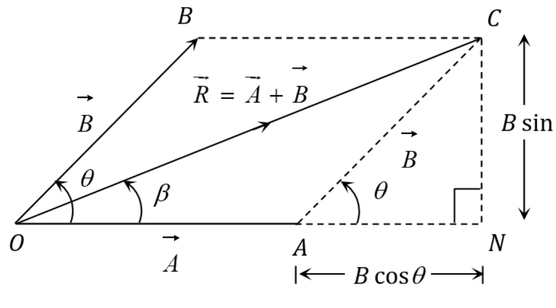
(1) परिमाण

◈ चूँकि, $R^2 = ON^2 + CN^2$

$$\Rightarrow R^2 = (OA + AN)^2 + CN^2$$

$$\Rightarrow R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

$$\therefore R = |\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$



विशेष स्थितियाँ:

$R = A + B$ जब $\theta = 0°$

$R = A - B$ जब $\theta = 180°$

$R = \sqrt{A^2 + B^2}$ जब $\theta = 90°$

(2) दिशा

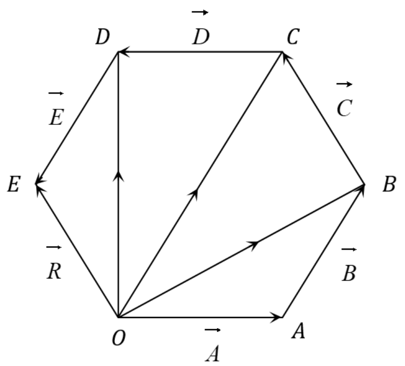
$$\tan\beta = \frac{CN}{ON} = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$$

सदिशों के योग का बहुभुज नियम (Polygon Law of Vector Addition)

❖ यदि n अशून्य सदिशों को n-भुजा वाले बहुभुज की $(n-1)$ भुजाओं द्वारा प्रदर्शित किया जाए तो बहुभुज की अंतिम भुजा या n वीं भुजा विपरीत दिशा में परिणामी सदिश को प्रदर्शित करती है।

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$



(1) दो असमान सदिशों का परिणामी शून्य नहीं हो सकता।

(2) तीन समतलीय सदिशों का परिणामी शून्य अथवा अशून्य दोनों हो सकता है।

(3) तीन असमतलीय सदिशों का परिणामी शून्य नहीं हो सकता।

सदिशों का व्यवकलन (अन्तर) (Subtraction of vectors)

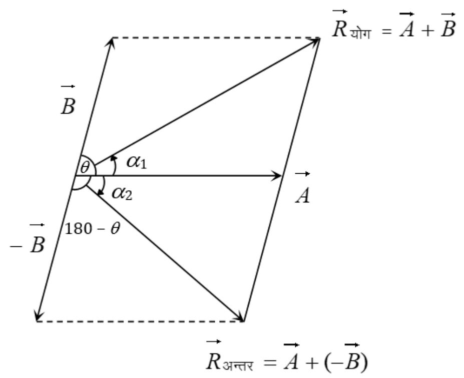
❖ चूँकि, $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ तथा

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\,\theta}$$

$$\Rightarrow |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\,(180° - \theta)}$$

❖ चूँकि, $\cos\,(180° - \theta) = -\cos\,\theta$

$\Rightarrow |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\,\theta}$



$\tan\,\alpha_1 = \dfrac{B\sin\,\theta}{A + B\cos\,\theta}$

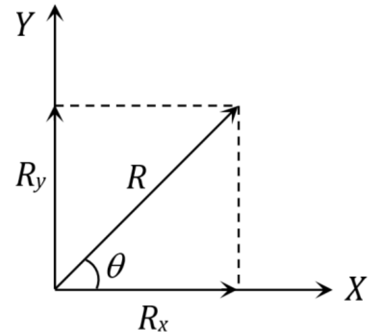
❖ तथा $\tan\,\alpha_2 = \frac{B\sin\,(180°-\theta)}{A+B\cos\,(180°-\theta)}$

❖ परन्तु $\sin\,(180° - \theta) = \sin\,\theta$ तथा $\cos\,(180° - \theta) = -\cos\,\theta$

$\Rightarrow \tan\,\alpha_2 = \dfrac{B\sin\,\theta}{A - B\cos\,\theta}$

द्विविमीय सदिश का लम्बवत् घटकों में वियोजन (Resolution of Vector Into Perpendicular Components)

❖ चित्र में दर्शाये अनुसार $x - y$ तल में सदिश $\vec{R}$ पर विचार करें। यदि हम x तथा y अक्षों के अनुदिश अभिलम्बवत् सदिश क्रमशः $\vec{R}_x$ तथा $\vec{R}_y$ खींचे तो सदिश योग के नियम से $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$



किसी सदिश के लिए $\vec{A} = A\hat{n}$

अतः, $\overrightarrow{R_x} = \hat{\imath}R_x$ तथा $\overrightarrow{R_y} = \hat{\jmath}R_y$

❖ अतः $\vec{R} = \hat{\imath}R_x + \hat{\jmath}R_y$ ………………… (i)

परन्तु चित्र से $R_x = R\cos\theta$ ………………. . (ii)

तथा $R_y = R\sin\theta$ ……………. . (iii)

❖ चूँकि R तथा θ सामान्यतः ज्ञात होते हैं, अतः समीकरण (ii) व (iii) से, $\vec{R}$ के घटकों के परिमाण क्रमशः x तथा y-अक्षों के अनुदिश ज्ञात हो जाते हैं।

❖ यहाँ ध्यान रखें कि एक बार किसी सदिश को उसके घटकों में वियोजित कर दिया जाता है तो उन घटकों का प्रयोग उस सदिश का वर्णन करने के लिये किया जा सकता है।

(1) सदिश $\vec{R}$ का परिमाण समीकरण (ii) व (iii) को वर्ग करके जोड़ने पर प्राप्त हो सकता है अर्थात्

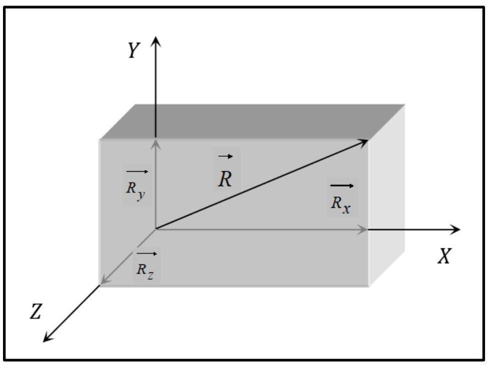
$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

(2) सदिश $\vec{R}$ की दिशा समीकरण (iii) को (ii) से विभाजित करने पर प्राप्त होती है, अर्थात्

$\tan\,\theta = (R_y/R_x)$ अथवा $\theta = \tan^{-1}(R_y/R_x)$

त्रिविमीय सदिश के समकोणिक घटक (Rectangular Components of 3-D Vector)

(1) $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z$ अथवा $\vec{R} = R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k}$



(2) यदि $\vec{R}$ x-अक्ष से α कोण, y-अक्ष से β कोण तथा z-अक्ष से γ कोण बनाये तब

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} = l$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{R_y}{R} = \frac{R_y}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} = m$$

$$\Rightarrow \cos\gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} = n$$

◈ जहाँ l, m, n सदिश $\vec{R}$ की दिक्कोज्यायें कहलाती हैं।
$l^2 + m^2 + n^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$
$= \frac{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 1$

(3) जब किसी बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) हों तो इसका स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ होगा

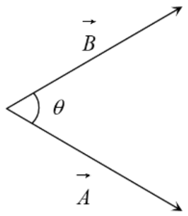
(4) जब एक कण बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से (x_2, y_2, z_2) तक गति करता है तो इसका विस्थापन सदिश होगा
$\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

दो सदिशों का अदिश गुणनफल (Scalar Product of Two Vectors)

◈ दो सदिशों का अदिश गुणनफल (या डॉट गुणनफल) उन सदिशों के परिमाणों तथा उनके बीच के कोण की कोज्या के गुणनफल के बराबर होता हैं।
अतः यदि दो सदिश $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के बीच कोण θ हो तो उनका अदिश गुणनफल $\vec{A}\cdot\vec{B}$ लिखा जायेगा तथा यह निम्न रुप से परिभाषित होगा $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

गुण :

(i) यह हमेशा अदिश होता है। यदि दो सदिशों के बीच का कोण न्यूनकोण (अर्थात् $\theta < 90°$) है तो इनका अदिश गुणनफल धनात्मक होगा तथा यदि कोण अधिककोण (अर्थात् $90° < \theta < 180°$) है तो यह ऋणात्मक होगा।



(ii) यह क्रम-विनिमय नियम का पालन करता है अर्थात्
$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

(iii) यह वितरण नियम का पालन करता है अर्थात्
$\vec{A}\cdot(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$

(iv) परिभाषा से $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$
सदिशों के बीच कोण $\theta = \cos^{-1}\left[\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}\right]$

(v) दो सदिशों के बीच अदिश गुणनफल अधिकतम होगा यदि $\cos\theta = \max = 1$, या $\theta = 0°$, अर्थात् सदिश एक दूसरे के समान्तर होंगे। $(\vec{A}\cdot\vec{B})_{\max} = AB$

(vi) दो सदिशों के बीच अदिश गुणनफल न्यूनतम होगा यदि $|\cos\theta| = \min = 0$, या $\theta = 90°$
$(\vec{A}\cdot\vec{B})_{\min} = 0$
अर्थात् यदि दो सदिश एक दूसरे के अभिलम्बवत् हों तो उनका अदिश गुणनफल शून्य होगा।

(vii) किसी सदिश का स्वयं के साथ अदिश गुणनफल निम्न प्रकार से दिया जाता है
$(\vec{A})^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} = AA\cos\theta = A^2$ अर्थात् $A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$

(viii) इकाई सदिश $\hat{n}$ की स्थिति में
$\hat{n}.\hat{n} = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1$
इसलिये $\hat{n}.\hat{n} = \hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

(ix) अभिलम्बवत् इकाई सदिशों $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ तथा $\hat{k}$ की स्थिति में
$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{\imath} = 1 \times 1\cos 90° = 0$

(x) घटकों के पदों में
$\vec{A}\cdot\vec{B} = (\vec{\imath}A_x + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z)\cdot(\vec{\imath}B_x + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z) = [A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z]$

उदाहरण :

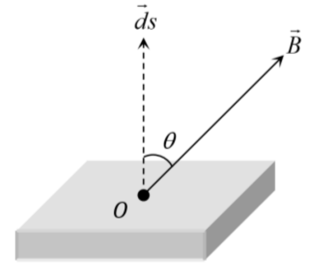
(i) कार्य W :

◈ भौतिकी में नियत बल द्वारा कार्य निम्न प्रकार परिभाषित होता है,
$W = Fs\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots.(i)$
परन्तु दो सदिशों के अदिश गुणनफल की परिभाषा से,
$\vec{F}\cdot\vec{s} = Fs\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$
अतः समीकरण (i) व (ii) से $W = \vec{F}\cdot\vec{s}$ अर्थात् कार्य, बल तथा विस्थापन का अदिश गुणनफल है।

(ii) शक्ति P :

◈ चूँकि $W = \vec{F}\cdot\vec{s}$ अथवा $\frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt}$ [चूँकि $\vec{F}$ नियत है]
अथवा $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$
अर्थात् शक्ति, बल तथा वेग का अदिश गुणनफल है।
[चूँकि $\frac{dW}{dt} = P$ तथा $\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}$]

(iii) चुम्बकीय फ्लक्स ϕ :



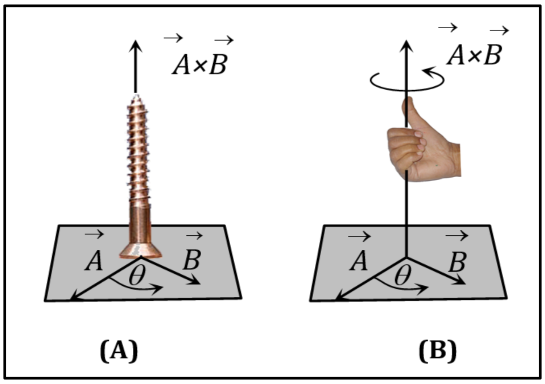
◈ किसी क्षेत्रफल से गुजरने वाला चुम्बकीय फ्लक्स
$d\phi = Bds\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$
परन्तु अदिश गुणनफल की परिभाषा से
$\vec{B}\cdot d\vec{s} = Bds\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$
अतः समीकरण (i) व (ii) से
$d\phi = \vec{B}\cdot d\vec{s}$ अथवा $\phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{s}$

(iv) द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा U:

◈ यदि $\vec{p}$ आघूर्ण का एक विद्युत द्विध्रुव, विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में स्थित है या $\vec{M}$ आघूर्ण का चुम्बकीय द्विध्रुव चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ के प्रभाव में स्थित है, तो द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा
$U_E = -\vec{p}\cdot\vec{E}$ एवं $U_B = -\vec{M}\cdot\vec{B}$

दो सदिशों का सदिश गुणनफल (Vector Product of Two Vectors)

- दो सदिशों का सदिश गुणनफल या क्रॉस गुणनफल एक सदिश राशि है, जिसका परिमाण उन दोनों सदिशों के परिमाण तथा उनके बीच के कोण की ज्या (sine) के गुणनफल के बराबर होता है तथा इसकी दिशा दक्षिणावर्ती पेंच नियम के अनुसार उस तल के लम्बवत् होती है, जिसमें दिये गये दोनों सदिश स्थित होते हैं। $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$
- इस प्रकार यदि $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ दो सदिश हैं, तो इनका सदिश गुणनफल $(\vec{A} \times \vec{B})$ एक सदिश $\vec{C}$ होगा, जो निम्न रुप से परिभाषित होगा $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\,\theta\hat{n}$



- $\vec{A} \times \vec{B}$, अर्थात् $\vec{C}$ की दिशा $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ को सम्मिलित करने वाले तल के लम्बवत् होती है। तथा $\vec{A}$ (प्रथम सदिश) से $\vec{B}$ (द्वितीय सदिश) तक लघुकोण से दक्षिणावर्ती पेंच घुमाने पर प्राप्त होती है।
- यदि एक दक्षिणावर्ती पेंच जिसकी अक्ष $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के तल के लम्बवत हो, को $\vec{A}$ से $\vec{B}$ की ओर लघुकोण से घुमाया जाये तो पेंच के बढ़ने की दिशा $\vec{A} \times \vec{B}$ अर्थात् $\vec{C}$ की दिशा होगी।

गुण:-

(i) दो सदिशों का सदिश गुणनफल सदैव दोनों सदिशों को सम्मिलित करने वाले तल के लम्बवत् होता है। अर्थात् $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के अभिलम्बवत् होगा चाहे $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ परस्पर अभिलम्बवत हों या न हो।

(ii) दो सदिशों का सदिश गुणनफल क्रम-विनिमय नियम का पालन नहीं करता अर्थात्
$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$ [परन्तु. $\vec{A} \times \vec{B}, = -\vec{B} \times \vec{A}$]
यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि
$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{B} \times \vec{A}| = AB\sin\,\theta$
अर्थात् सदिश $\vec{A} \times \vec{B}$ तथा $\vec{B} \times \vec{A}$ के परिमाण बराबर होते हैं परन्तु दिशायें विपरीत होती हैं।

(iii) सदिश गुणनफल वितरण नियम का पालन करता है जबकि सदिशों का क्रम वही रहे अर्थात्
$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

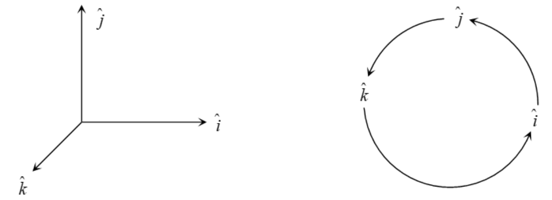
(iv) दो सदिशों का सदिश गुणनफल अधिकतम होगा यदि
$\sin\,\theta =$ अधिकतम $= 1$ अर्थात् $\theta = 90°$
$[\vec{A} \times \vec{B}]_{\text{max}} = AB\hat{n}$
अर्थात् सदिश गुणनफल अधिकतम होगा यदि सदिश अभिलम्बवत् हों।

(v) दो अशून्य सदिशों का सदिश गुणनफल न्यूनतम होगा यदि
$|\sin\,\theta| =$ न्यूनतम $= 0$, अर्थात् $\theta = 0°$ अथवा $180°$
$[\vec{A} \times \vec{B}]_{\text{min}} = 0$
अर्थात् यदि दो अशून्य सदिशों का सदिश गुणनफल शून्य है तो वे संरेखीय होंगे।

(vi) एक सदिश का स्वयं के साथ सदिश गुणनफल शून्य सदिश होता है अर्थात् $\vec{A} \times \vec{A} = AA\sin\,0°\hat{n} = \vec{0}$

(vii) इकाई सदिश की स्थिति में $\hat{n} \times \hat{n} = \vec{0}$
अत: $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$

(viii) अभिलम्बवत् इकाई सदिशों $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ के लिए, दक्षिणावर्ती पेंच नियम से



(A) (B)

$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}, \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$ तथा $\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$
चूँकि सदिश गुणनफल क्रम-विनिमय नियम का पालन नहीं करता अत: $\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}, \hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$ तथा $\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$

(ix) घटकों के पदों में
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$
$$= \hat{\imath}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{\jmath}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

(x) यदि दो सदिश $\vec{A}$ और $\vec{B}$ परस्पर समान्तर हैं, तब,
$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k$ (नियतांक > 0)

(xi) संलग्न भुजायें $\vec{A}$ व $\vec{B}$ से निर्मित समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $|\vec{A} \times \vec{B}|$

(xii) भुजाओं $\vec{A}$ व $\vec{B}$ से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$

(xiii) एक इकाई सदिश जो $\vec{A}$ के साथ-साथ $\vec{B}$ पर भी लम्बवत् है, $\hat{n} = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}$

(xiv) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) =$ भुजाओं $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ से निर्मित घनाभ का आयतन

उदाहरण :

- चूँकि दो सदिशों का सदिश गुणनफल एक सदिश होता है अत: सदिश भौतिक राशियाँ (विशेष तौर पर घूर्णन प्रभावों को व्यक्त करने वाली) जैसे बल आघूर्ण, कोणीय संवेग, वेग तथा चुम्बकीय क्षेत्र में गतिमान आवेश पर बल, दो सदिशों के सदिश गुणनफल के रूप में व्यक्त की जा सकती है।

(i) बल आघूर्ण $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

(ii) कोणीय संवेग $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

(iii) वेग $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

(iv) चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ में $\vec{v}$ वेग से गतिमान आवेशित कण q पर लगने वाला बल होगा $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$

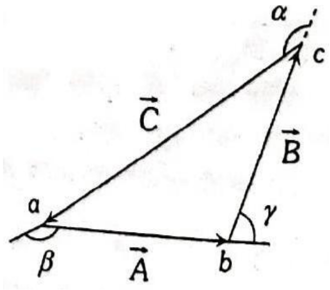
(v) विद्युत क्षेत्र में स्थित द्विध्रुव पर बल आघूर्ण $\vec{\tau}_E = \vec{p} \times \vec{E}$ तथा चुम्बकीय क्षेत्र में चुम्बकीय द्विध्रुव पर बल आघूर्ण $\vec{\tau_B} = \vec{M} \times \vec{B}$

सदिशों के सूत्र (Formulae of Vectors):

- निर्देशांक अक्ष X–, Y - तथा Z -अक्षों के अनुदिश एकांक सदिश क्रमशः i, j तथा k होते हैं।
- $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$
- $\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0$
- $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$
- $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}, \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}, \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$
- $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ जहाँ A_x, A_y व A_z क्रमशः $X-, Y-$ व Z-अक्षों के अनुदिश सदिश के प्रक्षेपों के परिणाम हैं।
- सदिश $\vec{A}$ का परिमाण
  $|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$
- सदिश $\vec{A}$ की दिक्कोज्याएँ
  $\cos\,\alpha = \frac{A_x}{A}, \cos\,\beta = \frac{A_y}{A}, \cos\,\gamma = \frac{A_z}{A}$
  जहाँ α, β व γ सदिश $\vec{A}$ द्वारा क्रमशः X, Y तथा Z-अक्षों के साथ बनाये गये कोण हैं।
- सदिश $\vec{A}$ की दिशा में एकांक सदिश $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$
- $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
- $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$
- दो सदिशों का अदिश अथवा डॉट गुणनफल
  $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\,\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
- दो सदिशों का सदिश अथवा क्रॉस गुणनफल
  $\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\,\theta\hat{n}$
  जहाँ $\hat{n}$ सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ द्वारा निर्देशित तल के लम्बवत् एकांक सदिश हैं।
- $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$
- $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{B} \times \vec{B} = 0$
- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times C$
- $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & B_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$
  $= \hat{\imath}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{\jmath}(A_zB_x - A_xB_z)$
  $+\hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$
- यदि $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ हो तो $\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|$
- यदि $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$ हो तो $\vec{A} \mid \vec{B}$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0\vec{A} \mid \vec{B}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}\vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}\vec{A} \times \vec{B} = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}S\vec{A} = \frac{dS}{dt}\vec{A} + S\frac{d\vec{A}}{dt}$
- $\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \hat{\imath}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \hat{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$

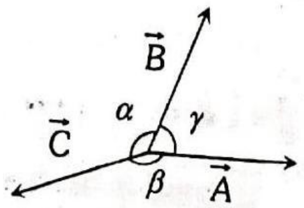
लामी प्रमेय (Lami's Theorem)

- माना किसी समतल में तीन सदिश इस प्रकार हैं कि
  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{O}$



इस स्थिति में,
$\frac{A}{ab} = \frac{B}{bc} = \frac{C}{ca}$

- यदि उपरोक्त सदिशों का पुच्छ भाग चित्रानुसार है तब यह पाया जाता है कि



$\frac{A}{\sin\,\alpha} = \frac{B}{\sin\,\beta} = \frac{C}{\sin\,\gamma}$
यह लामी की प्रमेय कहलाती है।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

- किसी समतल में किसी सदिश के केवल दो समकोणिक घटक होते हैं, तथा मुक्त आकाश में तीन समकोणिक घटक होते हैं।
- किसी सदिश के न्यूनतम दो घटकों से लेकर अनन्त घटक तक हो सकते हैं।
- अदिशों को साधारण बीजगणित के नियमों से जोड़ा, घटाया अथवा विभाजित किया जा सकता है।
- सदिशों को ज्यामितीय रूप से जोड़ा तथा घटाया जाता है।
- सदिशों का विभाजन संभव नहीं है, क्योंकि दिशाओं को विभाजित नहीं किया जा सकता।
- इकाई सदिश किसी सदिश की दिशा को प्रदर्शित करता है।
- इकाई सदिश का कोई मात्रक नहीं होता।
  उदाहरण के लिए, किसी पिण्ड का वेग 5 मी/से पूर्व की ओर है,
  अर्थात् $\vec{v} = 5\ \text{ms}^{-1}$ पूर्व दिशा में
  $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{5\ \text{ms}^{-1}(\text{पूर्व})}{5\ \text{ms}^{-1}} =$ पूर्व
  अतः इकाई सदिश $\hat{v}$ का कोई मात्रक नहीं होता क्योंकि पूर्व दिशा एक भौतिक राशि नहीं है।
- $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$. तथा $\vec{A} - \vec{A} = \vec{0}$ किन्तु $\vec{A} \times \vec{A} \neq \vec{A} - \vec{A}$
  क्योंकि $\vec{A} \times \vec{A} \perp \vec{A}$ तथा $\vec{A} - \vec{A}, \vec{A}$ के संरेखीय है।
- किसी सदिश में -1 का गुणा करने से सदिश की दिशा बदल जाती है।
  यदि $\vec{A} = \vec{B}$, तब $A = B$ तथा $\hat{A} = \hat{B}$
  यदि $\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$, तब $A = B$ किन्तु $\hat{A} = -\hat{B}$

- संरेखीय सदिशों की न्यूनतम संख्या, जिनका परिणामी शून्य हो सकता है, दो होती है।
- समतलीय सदिशों की न्यूनतम संख्या, जिनका परिणामी शून्य हो सकता है, तीन होती है।
- असमतलीय सदिशों की न्यूनतम संख्या, जिनका परिणामी शून्य हो सकता है, चार होती है।
- दो सदिश एक दूसरे के अभिलम्बवत् होते हैं यदि $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$
- दो सदिश एक दूसरे के समांतर होते हैं यदि $\vec{A}\times\vec{A}=0$
- विस्थापन, वेग, रेखीय संवेग तथा बल ध्रुवीय सदिश हैं।
- कोणीय वेग, कोणीय त्वरण, बल आघूर्ण तथा कोणीय संवेग अक्षीय सदिश हैं।
- तय की गई दूरी हमेशा धनात्मक राशि होती है।
- किसी सदिश के सदिश घटकों का परिमाण सदिश के परिमाण से कम या अधिक हो सकता है।
- सदिश के समकोणिक घटकों का परिमाण स्वयं उस सदिश के परिमाण से अधिक नहीं हो सकता।
- किसी सदिश को 0 से गुणा करने पर प्राप्त सदिश 'शून्य सदिश' कहलाता है।
- असमान परिमाण वाले दो सदिशों का परिणामी एक शून्य सदिश नहीं हो सकता।
- तीन सदिश जो कि एक ही समतल में स्थित नहीं हैं, के संयोजन सें शून्य सदिश प्राप्त नहीं किया जा सकता।
- वे भौतिक राशियाँ जिनका भिन्न दिशाओं में भिन्न परिमाण होता है, प्रदिश (Tensor) कहलाती हैं
  उदाहरण के लिये, जड़त्व आघूर्ण का मान भिन्न दिशाओं में भिन्न होता है अतः जड़त्व आघूर्ण एक प्रदिश है।
  प्रदिश के अन्य उदाहरण हैं - परावैद्युतांक, प्रतिबल, विकृति, घनत्व आदि ।
- यदि $\vec{A}=\vec{A}$, तब $A_x=B_x, A_y=B_y$ तथा $A_z=B_z$:
  या $\frac{A_x}{B_x}=\frac{A_y}{B_y}=\frac{A_z}{B_z}$
- यदि $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ अथवा यदि $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\vec{0}$, तब $\vec{A}+\vec{B}$ तथा $\vec{C}$ एक ही समतल में स्थित होते हैं।
- यदि $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$, तब $\vec{C},\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ दोनों सदिशों के लम्बवत् होगा।
- यदि $|\vec{A}+\vec{B}|=|\vec{A}-\vec{B}|$, तब $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के बीच का कोण 90° होगा।
- किन्हीं दो सदिशों का परिणामी अधिकतम होता है, जब $\theta=0°$ अर्थात् सदिश समान्तर हों।
  $R_{\max}=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos 0°}=|P+Q|$
  अतः दो सदिशों के परिणामी का अधिकतम मान उनके परिमाण के योग के तुल्य होता है।
- दो सदिशों का परिणामी न्यूनतम होता है, जब $\theta=180°$ अर्थात् सदिश प्रति समांतर हों।
  $R_{\min}=\sqrt{\dot{P}^2+Q^2+2PQ\cos 180°}=|P-Q|$
  अतः दो सदिशों के परिणामी का न्यूनतम मान उनके परिमाणों के अंतर के तुल्य होता है
- यदि दो सदिश असमान परिमाण के हैं, तब
  $R_{\min}=P-Q\neq 0. \qquad [\because |\vec{P}|\neq|\vec{Q}|]$
- अतः असमान परिमाणों वाले दो सदिशों के संयोजन से एक शून्य परिणामी प्राप्त नहीं किया जा सकता। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि असमान परिमाण वाले सदिशों की न्यूनतम संख्या, जिससे शून्य परिणामी प्राप्त किया जा सके, तीन होती हैं। दूसरे शब्दों में समान परिमाण के सदिशों की न्यूनतम संख्या, जिससे शून्य परिणामी प्राप्त किया जा सके, दो होती है।
- दो सदिशों $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के बीच का कोण
  $\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$ एवं $\tan\theta=\frac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{\vec{A}\cdot\vec{B}}$
- सदिश $\vec{B}$ की दिशा में सदिश $\vec{A}$ का प्रक्षेप $=\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}\right)$
  सदिश $\vec{A}$ की दिशा में सदिश $\vec{B}$ का प्रक्षेप $=\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|}\right)$
  सदिश $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ का, निर्देशांक अक्षों से 54.74 डिग्री कोण पर समान झुकाव होता है।
- यदि $\vec{A}\pm\vec{B}=\vec{C}$, तब $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=0$
- यदि $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=0$, तब $\vec{A}\cdot\vec{B}$ तथा $\vec{C}$ समतलीय होंगे।
- यदि $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के बीच का कोण 45° है तब
  $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}\times\vec{B}|$
- यदि $\vec{A}_1+\vec{A}_2+\vec{A}_3+\cdots\ldots+\vec{A}_n=\vec{0}$ तथा $A_1=A_2=A_3=\cdots\ldots=A_n$ तब दो संलग्न सदिश परस्पर $2\pi/n$ कोण पर झुके होते हैं।
- यदि $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ तथा $A^2+B^2=C^2$, तब $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के बीच का कोण 90° होता है।

अभ्यास प्रश्न

1. यदि एक कण बिन्दु P(2,3,5) से बिन्दु Q(3,4,5) तक गति करता है, तो इसका विस्थापन सदिश होगा?

(a) $\hat{i}+\hat{j}+10\hat{k}$ (b) $\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}$
(c) $\hat{i}+\hat{j}$ (d) $2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$ **[c]**

2. यदि $\vec{A}=3\hat{i}+4\hat{j}$ तथा $\vec{B}=7\hat{i}+24\hat{j}$, तब वह सदिश, जिसका परिमाण B के बराबर तथा दिशा A के समांतर हो, होगा

(a) $5\hat{i}+20J$ (b) $15\hat{i}+10J$
(c) $20\hat{i}+15J$ (d) $15\hat{i}+20J$ **[d]**

3. वह सदिश जिसे सदिश $\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $3\hat{i}+6\hat{j}-7\hat{k}$ में जोड़ने पर इनका परिणामी y-अक्ष के अनुदिश इकाई सदिश प्राप्त हो, होगा?

(a) $4\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}$ (b) $-4\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$
(c) $3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ (d) शून्य सदिश **[b]**

4. व्यंजक $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}\right)$ है?

(a) इकाई सदिश (b) शून्य सदिश
(c) $\sqrt{2}$ परिमाण का सदिश (d) अदिश **[a]**

5. 10N के पाँच एकसमान बल एक बिन्दु पर आरोपित किये गये हैं तथा यह सभी एक ही तल में हैं। यदि उनके मध्य कोण बराबर हों तो इनका परिणामी होगा?
(a) शून्य (b) 10 N
(c) 20 N (d) $10\sqrt{2}N$ [a]

6. सदिश $A = \hat{i} + \hat{j}$ द्वारा x- अक्ष के साथ बनाया गया कोण होगा?
(a) 90° (b) 45°
(c) 22.5° (d) 30° [b]

7. कोई सदिश किसी स्वेच्छ दिशा में दो (या तीन) सदिशों द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है। वे सदिश होंगे?
(a) समान्तर सदिश जिसका परिणामी मूल सदिश होगा
(b) परस्पर लम्बवत् सदिश जिनका परिणामी मूल सदिश होगा
(c) स्वेच्छ सदिश जिनका परिणामी मूल सदिश होगा
(d) सदिशों को परिणामी सम्भव नहीं है [c]

8. एक लड़का 400m × 300m, आकार वाले आयताकार पार्क में किनारों के अनुदिश एक समान गति से चलता है पार्क के एक कोने से प्रारंभ कर वह विकर्णतः विपरीत कोने पर पहुँचता है। तब निम्न में से कौनसा कथन असत्य है?
(a) उसके द्वारा तय की गई दूरी 700m है
(b) उसका विस्थापन 700 m है
(c) उसका विस्तापन 500 m है
(d) उसका वेग पूरी यात्रा में एक समान नहीं रहता [b]

9. सदिशों $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ तथा $\vec{B} = -\hat{i} + 3\hat{j} - 8\hat{k}$ के परिणामी सदिश के समांतर इकाई सदिश है?
(a) $\frac{1}{7}(3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k})$ (b) $\frac{1}{7}(3\hat{i}+6\hat{j}+2\hat{k})$
(c) $\frac{1}{49}(3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k})$ (d) $\frac{1}{49}(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k})$ [a]

10. कार्तीय निर्देशांक पद्धति में तीन सदिश निम्न प्रकार प्रदर्शित हैं $\vec{a} = 4\hat{i} - \hat{j}$, $\vec{b} = -3\hat{i} + 2\hat{j}$ तथा $\vec{c} = -\hat{k}$ जहाँ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ क्रमशः X, Y और Z- अक्ष के सापेक्ष इकाई सदिश है। इन सदिशों के संयोग के अनुदिश इकाई सदिश $\hat{r}$ है ?
(a) $\hat{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$ (b) $\hat{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$
(c) $\hat{r} = \frac{1}{3}(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ (d) $\hat{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ [a]

11. यदि दो इकाई सदिशों का योग इकाई सदिश हो, तो इनके अन्तर का परिमाण है?
(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}$
(c) $1/\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{5}$ [b]

12. माना $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j}, B = 3\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{C} = 6\hat{i} - 2\hat{k}$ तो $\vec{A} - 2\vec{B} + 3\vec{C}$ का मान होगा?
(a) $20\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k}$ (b) $20\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k}$
(c) $4\hat{i}+5\hat{j}+20\hat{k}$ (d) $5\hat{i}+4\hat{j}+10\hat{k}$ [b]

13. किसी बिन्दु द्रव्यमान पर दो बल F_1 व F_2 परस्पर लम्बवत् दिशाओं में लगते हैं। बिन्दु द्रव्यमान पर परिणामी बल होगा
(a) $F_1 + F_2$ (b) $F_1 - F_2$
(c) $\sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ (d) $F_1^2 + F_2^2$ [c]

14. यदि $|\vec{A} - \vec{B}| = |\vec{A}| = |\vec{B}|$ तब $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण है
(a) 60° (b) 0°
(c) 120° (d) 90° [a]

15. माना दो अशून्य सदिशों $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण 120° है तथा इनका परिणामी $\vec{C}$ है तो-
(a) $\vec{C}$ अवश्य ही $|\vec{A}-\vec{B}|$ के बराबर होगा
(b) $\vec{C}$ अवश्य ही $|\vec{A}-\vec{B}|$ से कम होगा
(c) $\vec{C}$ अवश्य ही $|\vec{A}-\vec{B}|$ से अधिक होगा
(d) $\vec{C}$, $|\vec{A}-\vec{B}|$ के बराबर हो सकता है [c]

16. दो सदिशों $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के मध्य कोण θ हो तो इनके योग का मान होगा -
(a) $\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$
(b) $\sqrt{A^2 - B^2 + 2AB\cos\theta}$
(c) $\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\sin\theta}$
(d) $\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\sin\theta}$ [a]

17. किसी बिन्दु पर कार्य करने वाले दो बलों का योग 16 N है। यदि परिणामी बल का मान 8 N तथा इसकी दिशा न्यूनतम बल के लम्बवत् है तो बलों के मान होंगे-
(a) 6 N तथा 10 N (b) 8 N तथा 8 N
(c) 4 N तथा 12 N (d) 2 N तथा 14 N [a]

18. यदि सदिशों P, Q तथा R के परिमाण क्रमशः 5, 12 तथा 13 इकाई हैं तथा $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$ है तो Q तथा R के बीच कोण है
(a) $\cos^{-1}\frac{5}{12}$ (b) $\cos^{-1}\frac{5}{13}$
(c) $\cos^{-1}\frac{12}{13}$ (d) $\cos^{-1}\frac{7}{13}$ [c]

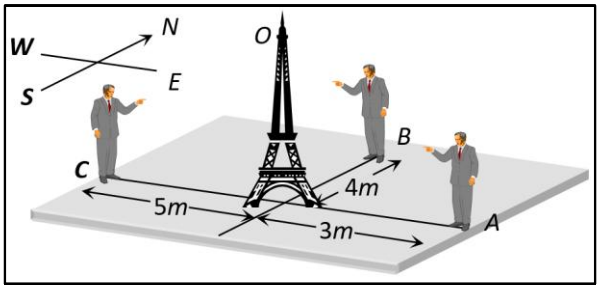
19. दो सदिशों $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ का परिणामी सदिश $\vec{A}$ के लम्बवत् है तथा इसका परिमाण सदिश $\vec{B}$ के परिमाण का आधा है। $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के बीच कोण होगा-
(a) 120°
(b) 150°
(c) 135°
(d) उपरोक्त में से कोई नहीं [b]

20. दो सदिशों $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, में कौन-सा सदिश जोड़ें कि उनका परिणामी x-अक्ष के अनुदिश इकाई सदिश हो-
(a) $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ (b) $-2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$
(c) $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ (d) $-2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ [b]

गतिकी (Kinematics)

स्थिति (Position)

◈ कोई वस्तु बिन्दु O पर स्थित है तथा तीन प्रेक्षक इस वस्तु को तीन विभिन्न स्थानों से देख रहे हैं तो तीनों प्रेक्षकों के बिन्दु O की स्थिति के बारे में विभिन्न प्रेक्षण होंगे। तथा कोई भी गलत नहीं होगा क्योंकि वे वस्तु को अपनी विभिन्न स्थितियों से देख रहे हैं।

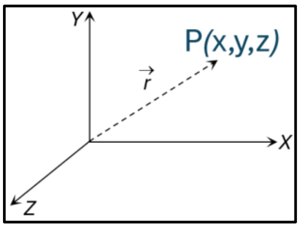


प्रेक्षक 'A' कहता है : बिन्दु O पश्चिम दिशा में 3m दूर है।
प्रेक्षक 'B' कहता है : बिन्दु O दक्षिण दिशा में 4m दूर है।
प्रेक्षक 'C' कहता है : बिन्दु O पूर्व दिशा में 5m दूर है।

◈ अतः किसी वस्तु की स्थिति दो कारकों द्वारा पूर्ण रूप से व्यक्त की जाती है। प्रेक्षक से इसकी दूरी तथा प्रेक्षक के सापेक्ष इसकी दिशा।

◈ अतः किसी भी बिन्दु की स्थिति को, स्थिति सदिश से व्यक्त किया जाता है।

◈ माना x, y तल में एक बिन्दु P स्थित है तथा इसके निर्देशांक (x, y) हैं। तो बिन्दु का स्थिति सदिश $(\vec{r}) = x\hat{i} + y\hat{j}$ होगा तथा यदि बिन्दु आकाश में स्थित हो और इसके निर्देशांक (x, y, z) हो तो इसका स्थिति सदिश $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ से व्यक्त किया जा सकता है।



विराम तथा गति (Rest and Motion)

◈ यदि कोई वस्तु समय के साथ दिए गए निर्देश तंत्र के सापेक्ष अपनी स्थिति नहीं बदलती तो यह विराम में कही जाती है।तथा यदि कोई वस्तु समय के साथ निर्देश तंत्र के सापेक्ष अपनी स्थिति बदलती है तो यह गति में कही जाती है।

◈ गति या स्थिर अवस्था सदैव ही किसी निर्देश बिन्दु, जिसे मूल बिन्दु कहते हैं के सापेक्ष मापी जाती है।

निर्देश तंत्र

◈ यह निर्देशांकों के उस समूह का निकाय है जो कि उस निर्देश फ्रेम से जुड़ा होता है, जिसके सापेक्ष प्रेक्षक किसी घटना की व्याख्या कर सकता है। प्लेटफार्म पर खड़ा यात्री, प्लेटफार्म पर स्थित किसी पेड़ को विराम अवस्था. में पाता है। लेकिन वही यात्री जब स्टेशन से गुजरती हुई रेलगाड़ी से पेड़ को देखता है तो उसे गत्यावस्था में पाता है। दोनों ही स्थितियों में प्रेक्षक सही है लेकिन प्रेक्षण भिन्न है क्योंकि प्रथम स्थिति में प्रेक्षक प्लेटफार्म पर खड़ा है जो कि एक स्थिर निर्देश तंत्र है तथा दूसरी स्थिति में प्रेक्षक गतिमान रेलगाड़ी में है जो एक गतिमान निर्देश तंत्र है।

◈ अतः विराम तथा गति सापेक्ष पद हैं, जो कि निर्देश तंत्र पर निर्भर करते हैं।

गति के प्रकार

एकविमीय गति	द्विविमीय गति	त्रिविमीय गति
सरल रेखा में वस्तु की गति एकविमीय गति कहलाती है।	समतल में वस्तु की गति द्विविमीय गति कहलाती है।	आकाश में वस्तु की गति त्रिविमीय गति कहलाती है।
जब किसी वस्तु की स्थिति का सिर्फ एक निर्देशांक समय के साथ परिवर्तित होता है तो वस्तु एक विमीय रूप से गतिमान कहलाती है।	ज़ब किसी वस्तु की स्थिति के दो निर्देशांक समय के साथ परिवर्तित होते हैं तो वस्तु द्विविमीय रूप से गतिमान कहलाती है।	जब किसी वस्तु की स्थिति के तीनों निर्देशांक समय के साथ परिवर्तित होते हैं तो वस्तु त्रिविमीय रूप से गतिमान कहलाती है।
उदाहरणः (i) सीधी सड़क पर कार की गति (ii) मुक्त रूप से गिरती वस्तु की गति	उदाहरण: (i) वृत्तीय मार्ग पर कार की गति (ii) बिलियर्ड गेंद की गति	उदाहरणः (i) उड़ती पतंग की गति (ii) उड़ते हुये कीट की गति

कण अथवा बिन्दु द्रव्यमान (Particle or Point Mass or Point object)

◈ पदार्थ का सबसे सूक्ष्म भाग जिसकी विमायें शून्य हों तथा जिसे द्रव्यमान तथा स्थिति से अभिव्यक्त किया जा सके कण अथवा बिन्दु द्रव्यमान कहलाता है।

◈ यदि वस्तु का आकार, वस्तु द्वारा तय की गयी दूरी की तुलना में नगण्य हो तो इसे कण कहते हैं।

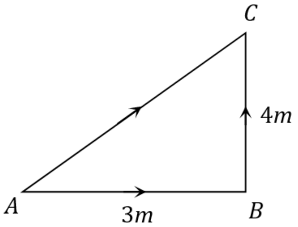
◈ एक वस्तु (कणों का समूह) को कण कहा जाना, गति के प्रकार पर निर्भर करता है।
उदाहरण के लिए सूर्य के चारों ओर ग्रहों की गति में, विभिन्न ग्रहों को कण माना जा सकता है।

◈ उपरोक्त अवधारणा में जब हम किसी वस्तु को कण मानते हैं तो वस्तु के सभी भागों में विस्थापन, वेग तथा त्वरण समान होता है।

दूरी तथा विस्थापन (Distance and Displacement)

(1) दूरी : दिए गये समय अन्तराल में गतिमान कण द्वारा तय किये गये वास्तविक पथ की लम्बाई को दूरी कहते हैं।

(i) यदि कोई कण बिन्दु A से प्रारम्भ होकर, B तक तथा तत्पश्चात् बिन्दु C तक पहुँचता है, जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है तो कण द्वारा चली गई दूरी $= AB + BC = 7 \text{ m}$



(ii) दूरी एक अदिश राशि है।

(iii) विमायें : $[M^0L^1T^0]$

(iv) मात्रक : मीटर (SI)

(2) विस्थापन : किसी वस्तु के स्थिति सदिश में परिवर्तन को उसका विस्थापन कहते हैं। अर्थात् प्रारम्भिक तथा अंतिम स्थिति को जोड़ने वाली सरल रेखा की लम्बाई विस्थापन कहलाती है।

(i) विस्थापन सदिश राशि है।

(ii) विमायें : $[M^0L^1T^0]$

(iii) मात्रक : मीटर (SI)

(iv) उपरोक्त चित्र में कण का विस्थापन

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2 + 2(AB)(BC)\cos 90^\circ} = 5 \text{ m}$

(v) यदि $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3 \ldots\ldots..\vec{S}_n$ किसी वस्तु के विस्थापन हों तो कुल विस्थापन, अलग-अलग विस्थापनों का सदिश योग होता है। $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \cdots \ldots + \vec{S}_n$

(3) दूरी तथा विस्थापन के बीच तुलना

(i) विस्थापन का परिमाण, दो स्थितियों के बीच न्यूनतम संभव दूरी के बराबर होता है। अतः दूरी $\geq$ |विस्थापन|

(ii) गतिमान कण के लिए दूरी कभी ऋणात्मक अथवा शून्य नहीं हो सकती जबकि विस्थापन हो सकता हैं।

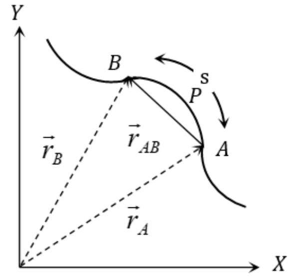
(शून्य विस्थापन का अर्थ है कि वस्तु गति के पश्चात् अपनी प्रारम्भिक स्थिति पर वापस आ चुकी है)

अर्थात् दूरी > 0 लेकिन, विस्थापन $>=$ अथवा < 0

(iii) दो बिन्दुओं के मध्य गति के लिए विस्थापन अद्वितीय फलन होता है जबकि दूरी वास्तविक पथ पर निर्भर करती है तथा इसका अनन्त मान हो सकते हैं।

(iv) गतिमान कण के लिए दूरी समय के साथ कभी घट नहीं सकती जबकि विस्थापन समय के साथ घट सकता है। समय के साथ विस्थापन के घटने का अर्थ है कि वस्तु प्रारम्भिक बिन्दु की ओर गतिमान है।

(v) सामान्यतः विस्थापन का परिमाण, दूरी के बराबर नहीं होता है। फिर भी यदि गति, सरल रेखा के अनुदिश दिशा अपरिवर्तित रहते हुए, होती है तो विस्थापन का परिमाण दूरी के बराबर हो सकता हैं।



(vi) यदि $\overrightarrow{r_A}$ तथा $\overrightarrow{r_B}$ कण की प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थिति के स्थिति सदिश है,तब कण का विस्थापन $\overrightarrow{r_{AB}} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}$ तथा यदि कण चित्रानुसार पथ APB में गति करता है तो चली गई दूरी S होगी।

चाल तथा वेग (Speed and Velocity)

(1) चाल : किसी गतिमान वस्तु की स्थिति परिवर्तन की दर को वस्तु की चाल कहते हैं।

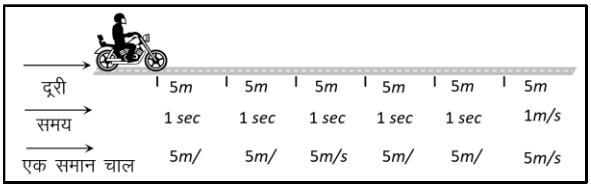
(i) यह एक अदिश राशि है, इसका प्रतीक $\boldsymbol{v}$ है।

(ii) विमायें : $[M^0LT^{-1}]$

(iii) मात्रक : मीटर / सैकण्ड (S.I.), सेमी / सैकण्ड (C.G.S.)

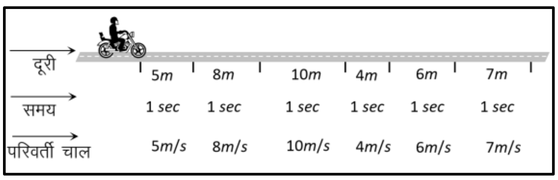
चाल के प्रकार

(a) एकसमान चाल : जब कोई कण समान समय अन्तराल में (चाहे अन्तराल कितना भी छोटा क्यों न हो) समान दूरी तय करता है तो इसकी चाल एकसमान चाल कहलाती है। दिये गये चित्र में एक मोटर साईकिल सवार समान दूरी ($= 5 \text{ m}$) प्रत्येक सैकण्ड में चलता है। अतः हम कह सकते हैं कि कण 5 m/s की एकसमान चाल से चल रहा है।



(b) असमान (परिवर्ती) चाल : जब कोई कण समान समय अन्तराल में असमान दूरी तय करता है तो इसकी चाल असमान अथवा परिवर्ती चाल कहलाती है। दिये गये चित्र में मोटर सायकल सवार प्रथम सैकण्ड में 5 m , द्वितीय सैकण्ड में 8 m , तीसरे सैकण्ड में 10 m, चौथे सैकण्ड में 4 m , आदि दूरियाँ तय करता है।

अतः इसकी चाल, प्रत्येक सैकण्ड के लिए भिन्न है। इसका अर्थ है कि कण असमान चाल से गतिमान है।



(c) औसत चाल : दिये गये समय अन्तराल में चली गई कुल दूरी तथा कुल समय के अनुपात को औसत चाल कहते हैं।

औसत चाल = $\frac{\text{चली गई कुल दूरी}}{\text{लिया गया समय}} \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

◈ **समय औसत चाल :** जब कोई कण भिन्न-भिन्न समयांतरालों $t_1, t_2, t_3, \ldots$ में भिन्न-भिन्न चालों क्रमशः $v_1, v_2, v_3, \ldots$ से चलता है तो यात्रा के सम्पूर्ण समय हेतु इसकी औसत चाल "समय औसत चाल" कहलाती है।

$$v_{av} = \frac{\text{कुल तय की गयी दूरी}}{\text{कुल लिया गया समय}}$$
$$= \frac{d_1+d_2+d_3+\cdots\ldots}{t_1+t_2+t_3+\cdots\ldots} = \frac{v_1t_1+v_2t_2+v_3t_3+\cdots\ldots}{t_1+t_2+t_3+\cdots\ldots}$$

◈ **दूरी औसत चाल :** जब कोई कण भिन्न भिन्न दूरियाँ $d_1, d_2, d_3 \ldots$, भिन्न समयान्तरालों $t_1, t_2, t_3 \ldots\ldots$ में क्रमशः $v_1, v_2, v_3 \ldots\ldots$ चाल से तय करता है, तो यात्रा की संपूर्ण दूरी हेतु इसकी औसत चाल "दूरी औसत चाल" कहलाती है।

$$v_{av} = \frac{\text{तय की गई कुल दूरी}}{\text{कुल लिया गया समय}} = \frac{d_1+d_2+d_3+\cdots\ldots}{t_1+t_2+t_3+\cdots\ldots}$$
$$= \frac{d_1+d_2+d_3+\cdots\ldots}{\frac{d_1}{v_1}+\frac{d_2}{v_2}+\frac{d_3}{v_3}+\cdots\ldots}$$

◈ यदि समय के साथ चाल लगातार बदल रही हो तो

$$v_{av} = \frac{\int v dt}{\int dt}$$

(d) तात्क्षणिक चाल : किसी विशेष क्षण पर वस्तु की चाल को उस वस्तु की तात्क्षणिक चाल कहते हैं। जब हम "चाल" कहते हैं तो इसका सामान्य अर्थ तात्क्षणिक चाल से ही होता है।

◈ तात्क्षणिक चाल, बहुत सूक्ष्म समय अन्तराल (अर्थात् $\Delta t \to 0$) के लिए औसत चाल होती है। अतः

तात्क्षणिक चाल $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$

(2) वेग : किसी वस्तु की एक निश्चित दिशा में स्थिति परिवर्तन की दर अर्थात् समय के साथ विस्थापन की दर को वेग कहते हैं।

(i) यह एक सदिश राशि है इसका प्रतीक $\vec{v}$ है।

(ii) विमायें : $[M^0L^1T^{-1}]$

(iii) मात्रक : मीटर/सैकण्ड (SI), सेमी / सैकण्ड (CGS)

वेग के प्रकार :

(a) एकसमान वेग : एक कण एकसमान वेग से गतिमान कहा जाता है यदि इसका परिमाण तथा दिशा दोनों ही समान रहें। यह केवल तभी सम्भव है जब कण एक सरल रेखा में एक ही दिशा में नियत वेग से गतिमान हो।

(b) असमान वेग : एक कण असमान वेग से गतिमान कहा जाता है, यदि इसकी दिशा अथवा परिमाण परिवर्तित हों। (अथवा दोनों परिवर्तित हो)

(c) औसत वेग : वस्तु के कुल विस्थापन तथा कुल समय के अनुपात को उस वस्तु का औसत वेग कहते हैं।

औसत वेग = $\frac{\text{कुल विस्थापन}}{\text{कुल समय}}$ अर्थात् $\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

(d) तात्क्षणिक वेग : किसी निश्चित क्षण पर किसी कण के स्थिति सदिश में परिवर्तन की दर तात्क्षणिक वेग कहलाती है।

तात्क्षणिक वेग $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

◈ यदि कोई पिण्ड विरामावस्था से प्रारम्भ होकर निश्चित समय के लिए नियत दर α से त्वरित होता है तथा उसके बाद नियत दर β से अवमन्दित होते हुए, प्रारम्भिक बिन्दु से t सैकण्ड बाद विरामावस्था में आ जाता है, तब

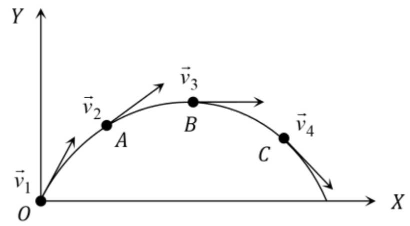
(a) पिण्ड का अधिकतम वेग $= \frac{\alpha\beta t}{\alpha+\beta}$ और

(b) पिण्ड द्वारा तय दूरी $= \frac{\alpha\beta t^2}{(2\alpha+2\beta)}$

तात्क्षणिक चाल तथा तात्क्षणिक वेग में तुलना :

(a) तात्क्षणिक वेग सदैव कण द्वारा तय किये गये पथ की स्पर्शरेखीय दिशा में होता है।

◈ जब एक पत्थर बिन्दु ' O ' से फेंका जाता है तो प्रक्षेपण बिन्दु पर कण का तात्क्षणिक वेग $\overrightarrow{v_1}$ है, बिन्दु A पर पत्थर का तात्क्षणिक वेग $\overrightarrow{v_2}$ है इसी प्रकार बिन्दु B तथा C पर क्रमशः $\overrightarrow{v_3}$ तथा $\overrightarrow{v_4}$ हैं।



◈ इन वेगों की दिशा प्रक्षेप्य पथ पर दिये गये बिन्दु पर स्पर्शरेखा खींच कर ज्ञात की जा सकती है।

(b) यह सम्भव है कि किसी कण की तात्क्षणिक चाल नियत हो परन्तु तात्क्षणिक वेग परिवर्ती हो।

उदाहरण : जब कोई कण एकसमान वृत्तीय गति करता है तो इसकी चाल प्रत्येक क्षण नियत रहती है परन्तु वेग प्रत्येक क्षण परिवर्तित होता रहता है।

(c) तात्क्षणिक वेग का परिमाण, तात्क्षणिक चाल के बराबर होता है।

(d) यदि कोई कण नियत वेग से गतिमान है, तब इसके औसत वेग तथा तात्क्षणिक वेग सदैव समान होंगे।

(e) यदि विस्थापन समय का फलन है, तो विस्थापन का समय के साथ अवकलज, वेग के तुल्य होता है।

माना विस्थापन $x = A_0 - A_1t + A_2t^2$

◈ तात्क्षणिक वेग $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A_0 - A_1t + A_2t^2)$

$$v = -A_1 + 2A_2t$$

t के दिये गये मान के लिए, हम तात्क्षणिक वेग ज्ञात कर सकते हैं।

◈ उदाहरण के लिए, $t = 0$ पर, तात्क्षणिक वेग $\vec{v} = -A_1$ तथा तात्क्षणिक चाल $|\vec{v}| = A_1$

औसत चाल तथा औसत वेग में तुलना :

(a) औसत चाल एक अदिश राशि है जबकि औसत वेग सदिश। दोनों के मात्रक ($\mathrm{m/s}$) तथा विमायें [LT^{-1}] समान होते हैं।

(b) औसत चाल अथवा वेग उस समय अन्तराल पर निर्भर करते हैं जिसमें यह परिभाषित हो।

(c) दिये गये समय अन्तराल के लिए औसत वेग का सिर्फ एक ही मान होता है जबकि औसत चाल के कई मान हो सकते हैं जो तय किये गये पथ पर निर्भर करते हैं।

(d) यदि वस्तु गति के पश्चात् अपनी प्रारम्भिक स्थिति में लौट आती है तो $\vec{v}_{av} = 0$ (चूँकि $\Delta\vec{r} = 0$) परन्तु $v_{av} \geq 0$ तथा नियत (चूँकि $\Delta s > 0$)

(e) गतिमान वस्तु के लिए औसत चाल कभी ऋणात्मक अथवा शून्य नहीं हो सकती (जब तक कि $t \rightarrow \infty$) जबकि औसत वेग ऋणात्मक अथवां शून्य हो सकता है। अर्थात् $v_{av} > \delta$ जबकि $\vec{v}_{av} =$ अथवा < 0

(f) जैसा कि हम जानते हैं कि दिये गये समयान्तराल के लिये
दूरी $\geq$ |विस्थापन
$\therefore$ औसत चाल $\geq$ |औसत वेग।

त्वरण
(Acceleration)

◈ किसी वस्तु के वेग में परिवर्तन की दर उसका त्वरण कहलाती है।

(1) यह एक सदिश राशि है। इसकी दिशा वेग परिवर्तन की दिशा होती है (वेग की दिशा नहीं)।

वेग में परिवर्तन के प्रकार

जब केवल वेग की दिशा परिवर्तित हो	जब केवल वेग का परिमाण परिवर्तित हो	जब वेग के परिमाण तथा दिशा दोनों परिवर्तित हो
त्वरण वेग के लम्बवत् होता है	त्वरण वेग के समान्तर अथवा प्रति समान्तर होता है	त्वरण के दो घटक होंगे, एक वेग के लम्बवत् तथा दूसरा वेग के समान्तर अथवा प्रतिसमान्तर होगा
उदाहरण : एकसमान वृतीय गति	उदाहरण : गुरुत्व के अधीन गति	उदाहरण : प्रक्षेप्य गति

(2) विमायें : $[M^0L^1T^{-2}]$

(3) मात्रक : मीटर / सैकण्ड ^{2} (SI); सेमी / सैकण्ड ^{2} (CGS)

(4) त्वरण के प्रकार

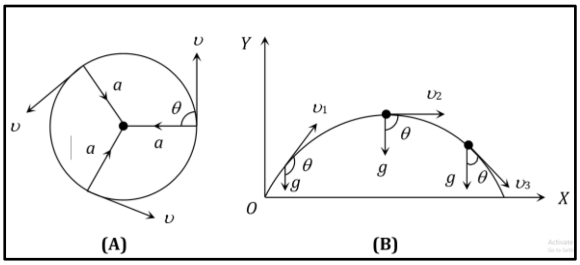
(i) एकसमान त्वरण : यदि कण की गति के दौरान, त्वरण का परिमाण व दिशा नियत रहे तो कण का त्वरण एकसमान त्वरण तथा इसकी गति एकसमान त्वरित गति कहलाती है।

(ii) परिवर्ती (असमान) त्वरण : यदि गति के दौरान कण के त्वरण का परिमाण अथवा दिशा अथवा दोनों परिवर्तित होते हैं, तो इंसका त्वरण परिवर्ती त्वरण कहलाता है।

(iii) औसत त्वरण : $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v_2}-\vec{v_1}}{\Delta t}$
औसत त्वरण सदिश की दिशा, वेग सदिश में परिवर्तन की दिशा में होती है, क्योंकि $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

(iv) तात्क्षणिक त्वरण $= \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

(v) गतिमान वस्तु के तात्क्षणिक वेग की दिशा तथा त्वरण की दिशा में कोई सम्बन्ध नहीं होता।



उदाहरण :
(a) एकसमान वृत्तीय गति में सदैव $\theta = 90^{\circ}$
(b) प्रक्षेप्य गति में, प्रक्षेप्य पथ के प्रत्येक बिन्दु पर θ परिवर्ती होता है।

(vi) m द्रव्यमान के किसी कण पर यदि $\vec{F}$ बल कार्य करता है तो न्यूटन के द्वितीय नियम से, त्वरण $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

(vii) परिभाषा से, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$ [चूँकि $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$]
अर्थात् यदि x, समय का फलन हो, तो विस्थापन का द्वितीय अवकलज त्वरण कहलाता है।

(viii) यदि वेग, स्थिति का फलन हो तो श्रृंखला नियम से $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \times \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx}$ [चूँकि $v = \frac{dx}{dt}$]

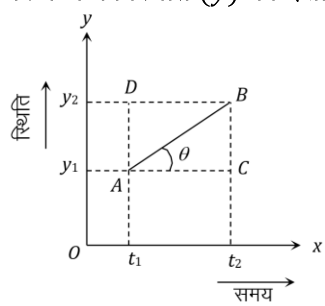
(ix) त्वरण धनात्मक, शून्य अथवा ऋणात्मक हो सकता है। धनात्मक त्वरण का अर्थ है कि वेग समय के साथ बढ़ रहा है। शून्य त्वरण का अर्थ है कि वेग एक समान अथवा नियत है जबकि ऋणात्मक त्वरण (मंदन) का अर्थ है कि वेग समय के साथ घट रहा है।

(x) गुरुत्व के अधीन गति में, त्वरण 'g' के बराबर होता है, जहाँ g गुरुत्वीय त्वरण है। इसका मान 9.8 m/s^2 अथवा 980 cm/s^2 अथवा 32 feet $/s^2$ होता है।

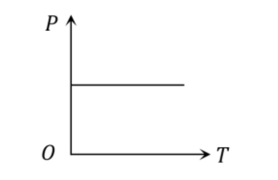
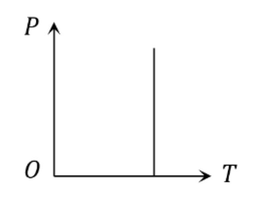
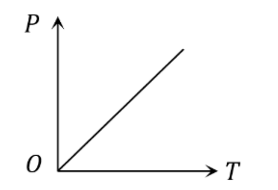
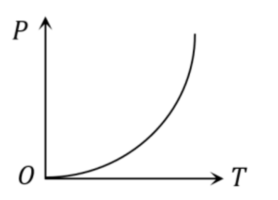
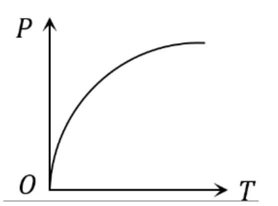
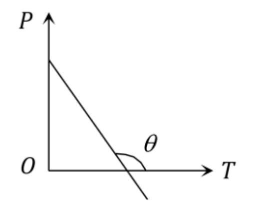
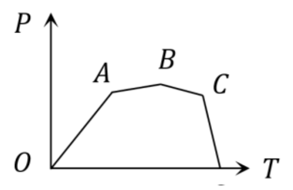
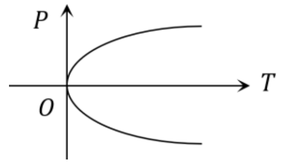
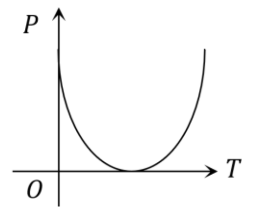
स्थिति-समय ग्राफ (Position - Time Graph)

◈ गति के दौरान कण के गतिकीय विश्लेषण चर (v, a, s) समय के साथ परिवर्तित होते हैं। यह ग्राफ द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।

◈ स्थिति-समय ग्राफ में हम x-अक्ष पर समय (t) तथा y-अक्ष पर कण की स्थिति (y) को दर्शाते हैं।

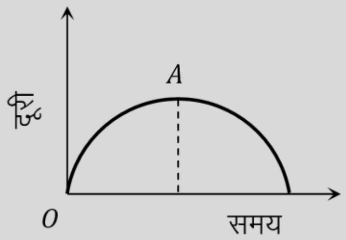


◈ माना किसी गतिमान कण के लिए स्थिति-समय ग्राफ AB है, तब
वेग $= \frac{\text{स्थिति में परिवर्तन}}{\text{लिया गया समय}}$
$= \frac{y_2-y_1}{t_2-t_1} \ldots\ldots\ldots\ldots..(i)$
त्रिभुज ABC से,
$\tan\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{AD}{AC} = \frac{y_2-y_1}{t_2-t_1} \ldots\ldots\ldots\ldots..(ii)$
समीकरण (i) व (ii) की तुलना करने पर, वेग $(v) = \tan\theta$
स्पष्ट है कि स्थिति-समय ग्राफ की प्रवणता कण के वेग को प्रदर्शित करती है।

विभिन्न स्थिति-समय ग्राफ तथा उनकी व्याख्या	
	$\theta = 0^{\circ}$ अतः $v = 0$ अर्थात् समय अक्ष के समान्तर रेखा कण की विराम स्थिति को प्रदर्शित करती है।
	$\theta = 90^{\circ}$ अतः $v = \infty$ अर्थात् समय अक्ष के लम्बवत रेखा यह प्रदर्शित करती है कि कण की स्थिति परिवर्तित हो रही है परन्तु समय परिवर्तित नहीं हो रहा है। इसका अर्थ है कि कण का वेग अनन्त है। व्यवहारिक रूप में यह सम्भव नहीं है।
	$-\theta =$ नियतांक अतः $v =$ नियतांक $\Rightarrow a = 0$ अर्थात् नियत ढाल की रेखा कण के एकसमान वेग को दर्शाती है।
	θ बढ़ रहा है अतः v बढ़ रहा है $\Rightarrow$ ' a ' धनात्मक है। अर्थात् स्थिति अक्ष की ओर झुकने वाली रेखा कण के बढ़ते वेग को प्रदर्शित करती है। इसका अर्थ यह है कि कण त्वरित हो रहा है।
	θ घट रहा है अतः v घट रहा है $\Rightarrow a$ ऋणात्मक है। अर्थात् समय अक्ष की ओर झुकने वाली रेखा कण के घटते वेग को प्रदर्शित करती है। इसका अर्थ यह है कि कण मंदित हो रहा है।
	θ नियत परन्तु $> 90^{\circ}$ है, अतः v नियत लेकिन ऋणात्मक होगा। अर्थात् ऋणात्मक ढाल की रेखा यह प्रदर्शित करती है कि कण निर्देश बिन्दु की ओर लौटता है। ऋणात्मक विस्थापन)
	विभिन्न ढालों के सरल रेखीय खण्ड यह प्रदर्शित करते हैं कि एक निश्चित समय अन्तराल के पश्चात् कण का वेग परिवर्तित हो जाता है।
	यह ग्राफ यह प्रदर्शित करता है कि किसी एक क्षण पर कण की दो स्थितियाँ हैं जो कि सम्मव नहीं है।
	यह ग्राफ यह प्रदर्शित करता है कि कण प्रारम्भ में मूल अवस्था की ओर आता है तथा फिर यह मूल अवस्था से दूर जाता है।

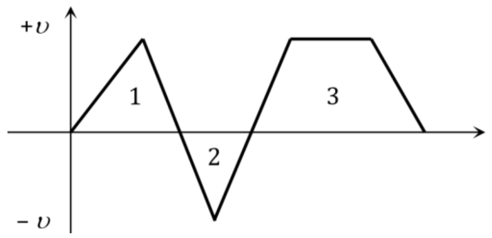
Note

- यदि दूरी तथा समय के बीच ग्राफ खींचा जाये तो सदैव बढ़ता हुआ वक्र प्राप्त होता है तथा यह कभी भी मूल अवस्था पर वापस नहीं आ सकता क्योंकि समय के साथ दूरी कभी नहीं घटती।
- अतः इस प्रकार का दूरी समय ग्राफ केवल बिन्दु A तक ही सत्य है। बिन्दु A के पश्चात् यह सत्य नहीं है।



वेग-समय ग्राफ (Velocity-Time Graph)

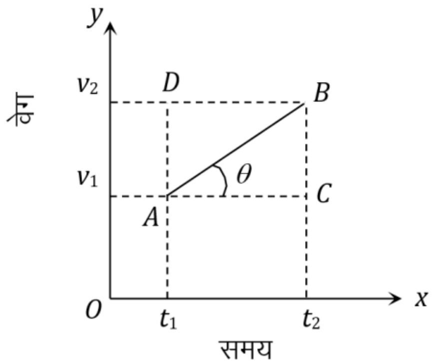
- x-अक्ष के अनुदिश समय t लेकर तथा y-अक्ष पर वेग लेकर वेग-समय ग्राफ खींचा जाता है।
- **दूरी तथा विस्थापन का परिकलन :** वेग-समय ग्राफ तथा समय अक्ष के बीच घिरा क्षेत्रफल दिये गये समय अन्तराल में विस्थापन तथा दूरी को प्रदर्शित करता है तो
  कुल दूरी $= |A_1| + |A_2| + |A_3|$
  = विभिन्न क्षेत्रफलों के मापांकों का योग अर्थात् $s = \int |v|dt$
  कुल विस्थापन $= A_1 + A_2 + A_3$
  = चिह्नों को ध्यान में रखते हुये विभिन्न क्षेत्रफलों का योग अर्थात् $r = \int vdt$
- समय अक्ष के ऊपर का क्षेत्रफल धनात्मक तथा समय अक्ष के नीचे का क्षेत्रफल ऋणात्मक लिया जाता है।



- यहाँ A_1 तथा A_2 क्रमशः त्रिभुज 1 तथा 2 के क्षेत्रफल हैं तथा A_3 समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल है।

त्वरण का परिकलन :

- माना AB किसी गतिमान कण के लिए वेगसमय ग्राफ है



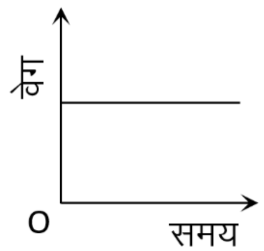
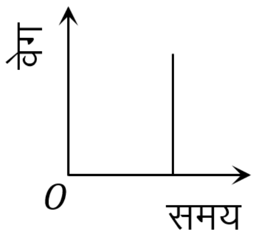
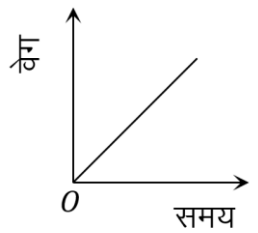
त्वरण $= \frac{\text{वेग में परिवर्तन}}{\text{लिया गया समय}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

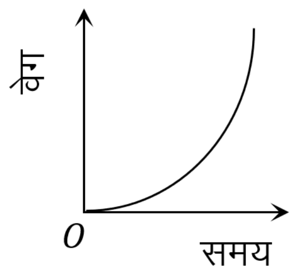
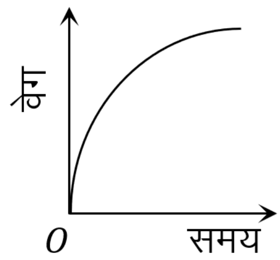
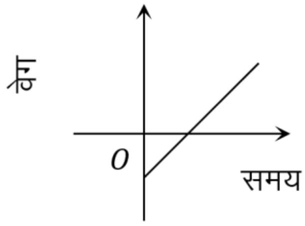
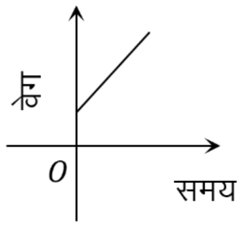
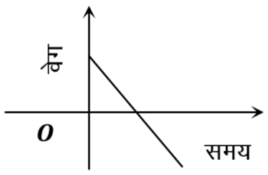
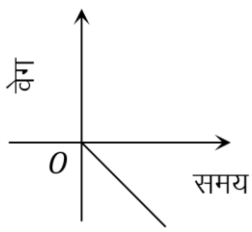
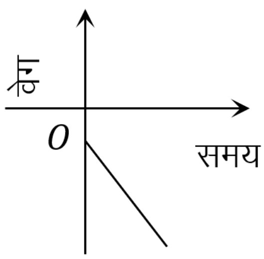
त्रिभुज ABC से, $\tan\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{AD}{AC} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

समीकरण (i) तथा (ii) की तुलना करने पर

त्वरण $(a) = \tan\theta$

- स्पष्ट है कि वेग-समय ग्राफ की प्रवणता कण के त्वरण को प्रदर्शित करती है।

विभिन्न वेग-समय ग्राफ तथा उनकी व्याख्या	
	$\theta = 0^\circ, a = 0, v =$ नियत अर्थात् समय अक्ष के समान्तर रेखा यह प्रदर्शित करती है कि गतिमान कण का वेग नियत है।
	$\theta = 90^\circ, a = \infty, v =$ बढ़ रहा है, अर्थात् समय अक्ष के लम्बवत रेखा यह प्रदर्शित करती है कि कण का वेग बढ़ रहा है परन्तु समय परिवर्तित नहीं हो रहा है। इसका अर्थ यह है कि कण का त्वरण अनन्त है। व्यवहारिक रूप में यह सम्भव नहीं है।
	$\theta =$ नियत, अतः $a =$ नियत तथा v समय के साथ एकसमान रूप से बढ़ रहा है। अर्थात् नियत ढाल की रेखा कण के एकसमान त्वरण को प्रदर्शित करती है।

	θ बढ़ रहा है अतः त्वरण बढ़ रहा है। अर्थात् वेग अक्ष की ओर झुकी रेखा वस्तु में बढ़ते त्वरण को प्रदर्शित करती है।
	θ घट रहा है अतः त्वरण घट रहा है। अर्थात् समय अक्ष की ओर झुकी रेखा वस्तु में घटते त्वरण को प्रदर्शित करती है।
	त्वरण धनात्मक तथा नियत है क्योंकि θ नियत है तथा $< 90^\circ$ लेकिन कण का प्रारम्भिक वेग ऋणात्मक है।
	त्वरण धनात्मक तथा नियत है क्योंकि θ नियत तथा $< 90^\circ$ है, परन्तु कण का प्रारम्भिक वेग धनात्मक है।
	त्वरण ऋणात्मक तथा नियत है क्योंकि θ नियत तथा $> 90^\circ$ है, परन्तु कण का प्रारम्भिक वेग धनात्मक है।
	त्वरण ऋणात्मक तथा नियत है क्योंकि θ नियत तथा $> 90^\circ$ है, परन्तु कण का प्रारम्भिक वेग शून्य है।
	त्वरण ऋणात्मक तथा नियत है क्योंकि θ नियत तथा $> 90^\circ$ है, परन्तु कण का प्रारम्भिक वेग ऋणात्मक है।

04 गति के नियम (Laws Of Motion)

बिन्दु द्रव्यमान (Point Mass)

- किसी वस्तु को बिन्दु द्रव्यमान कहा जाता है, यदि वह गति के दौरान दिये गये समय में अपने आकार की तुलना में अत्यधिक दूरी तय करती है।
- शुन्य विमा वाली वस्तु को बिन्दु द्रव्यमान कहा जा सकता है।
- बिन्दु द्रव्यमान समस्याओं के सरलीकरण की एक गणितीय संकल्पना है।
- जब किसी वस्तु का आकार और आकृति गणना में महत्वपूर्ण नहीं होते, तब उसे बिन्दु द्रव्यमान मान लिया जाता है।
- खगोलीय पिंडों (जैसे पृथ्वी या ग्रह) की गति का अध्ययन करते समय उन्हें अक्सर बिन्दु द्रव्यमान माना जाता है।

जड़त्व (Inertia)

- वस्तुओं का वह अंतर्निहित गुण, जिसके कारण वे अपनी विरामावस्था अथवा सरल रेखा में एकसमान गति की अवस्था में स्वयं परिवर्तन नहीं कर सकती, जड़त्व कहलाता है।
- जड़त्व एक भौतिक राशि नहीं है, यह केवल वस्तु का अंतर्निहित गुण है जो कि वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर करता हैं।
- जड़त्व का कोई मात्रक अथवा विमा नहीं होती।
- समान द्रव्यमान की दो वस्तुओं, (जिनमें से एक गतिमान तथा दूसरी स्थिर है) का जड़त्व समान होता है, क्योंकि जड़त्व केवल द्रव्यमान पर निर्भर करता है। यह वस्तु के वेग पर निर्भर नहीं करता।

न्यूटन के गति के नियम (Newton's laws of motion)

न्यूटन का प्रथम नियम (Newton's First Law)

- यदि कोई वस्तु स्थिर अवस्था में है, तो वह स्थिर रहेगी अथवा सरल रेखा में एकसमान गति कर रही है, तो वह तब तक गति करती रहेगी, जब तक उस पर कोई बाह्य बल आरोपित न किया जाये।
- यदि वस्तु पर परिणामी बल शून्य है तो वस्तु का वेग परिवर्तित नहीं होता अर्थात् वस्तु में त्वरण नहीं होता।
- न्यूटन का प्रथम नियम बल की गुणात्मक परिभाषा देता है।
- गणितीय रूप से इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं यदि " $\vec{a} = 0$ यदि और केवल यदि $\vec{F} = 0$ "
- यदि कण पर क्रियाशील सभी बलों का योग शून्य प्राप्त होता है, तब कण अत्वरित रहता है।
- न्यूटन का प्रथम नियम जड़त्व को परिभाषित करता है। अतः गैलीलियो ने इसे 'जड़त्व का नियम' भी कहा जाता है।
- **जड़त्व तीन प्रकार का होता है -**

  1. विराम का जड़त्व
  2. गति का जड़त्व
  3. दिशा का जड़त्व।

1. विराम का जड़त्व :

- यह वस्तु का वह गुण है, जिसके कारण वस्तु स्वयं अपनी विराम अवस्था में परिवर्तन नहीं कर सकती। इसका अर्थ है, कि यदि कोई वस्तु विराम अवस्था में है, तो वह विराम अवस्था में ही रहती है अर्थात् स्वयं गति प्रारंभ नहीं कर सकती।

उदाहरण-

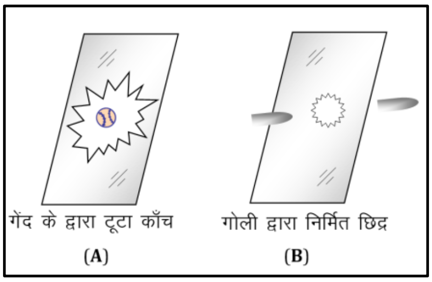
(i) एक आदमी बस में, स्वतंत्र रूप से खड़ा है। जब बस अचानक चलना प्रारम्भ करती है, तब वह पीछे की ओर गिरता है।,

- जब बस अचानक चलना प्रारंभ करती है, तो बस की गति के लिए आवश्यक बल शरीर के निचले भाग में भी संचरिंत होता है।
- अतः शरीर का निचला भाग बस के साथ ही गतिमान होता है, जबकि शरीर के ऊपरी भाग में (कमर से ऊपर का भाग) विराम के जड़त्व के कारण कोई बल संचरित नहीं होता, अतः यह हिस्सा अपनी पूर्व अवस्थां में ही रहता है। इस प्रकार शरीर के दो हिस्सों के बीच परिणामी विस्थापंन होने से शरीर के ऊपरी हिस्से को पीछे की ओर झटका लगता हैं।

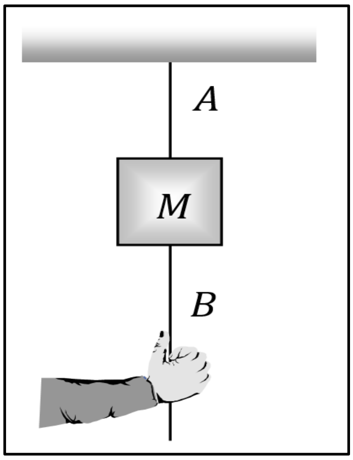
(ii) यदि बस धीमी गति से गतिमान है, तो गति का जड़त्व एकसमान रूप से व्यक्ति के शरीर में संचरित हो जाता है, जिससे व्यक्ति का संपूर्ण शरीर बस के साथ गतिमान हो जाता है, तथा व्यक्ति को कोई झटका नहीं लगता।

(iii) जब कोई घोड़ा अचानक दौड़ना शुरू कर देता है, तब घुड़सवार पीछे की ओर गिरने लगता है, ऐसा व्यक्ति के शरीर के ऊपरी हिस्से में विराम के जड़त्व के कारण होता है।

(iv) बंदूक की गोली को काँच की खिड़की पर फायर करने पर यह स्पष्ट छिद्र बनाती हुई निकलती है, जबकि कोई गेंद पूरी खिड़की के काँच को तोड़ देती है।इसका कारण यह है कि गोली का वेग गेंद की अपेक्षा अत्यधिक होता है, अतः काँच के साथ इसका संपर्क अत्यंत कम समय तक होता है, अतः गोली के कारण, गति काँच के केवल छोटे से भाग में ही संचरित होती है। अतः यह काँच की खिड़की से एक स्पष्ट छिद्र बनाती हुई निकलती है, जबकि गेंद से सम्बधित समय तथा संपर्क क्षेत्रफल अधिक होता है। इस समय में गति पुरी खिड़की के काँच में संचरित हो जाती है, अतः यह पूरी खिड़की को तोड़ देता है।



(v) चित्र में दर्शायी गयी व्यवस्था में :



(a) यदि धागे B को अचानक झटके से खींचा जाता है, तब इसमें तनाव उत्पन्न हो जाता है, परन्तु द्रव्यमान M के विराम के जड़त्व के कारण यह बल धागे A में संचरित नहीं होता अतः धागा B टूट जाता है।

(b) यदि धागे B को एक स्थायी बल F द्वारा खींचा जाता है, तब यह द्रव्यमान M द्वारा धागे B से धागे A की ओर संचरित हो जाता है। चूँकि धागे A में तनाव B की अपेक्षा Mg (द्रव्यमान M का भार) से अधिक होता है, अतः इस स्थिति में धागा A टूट जाता है।

(vi) यदि हम किसी गिलास के ऊपर रखे एक चिकने कार्ड बोर्ड पर कोई सिक्का रखते हैं तथा उँगलियों की सहायता से कार्ड बोर्ड को एकाएक दूर धकेलते हैं, तब कार्ड-बोर्ड दूर गिर जाता है जबकि सिक्का विराम के जड़त्व के कारण गिलास में गिर जाता है

(vii) किसी दरी को छड़ से झाड़ने पर इसमें से धूल के कण गिरने लगते हैं, क्योंकि दरी को छड़ से झाड़ने पर दरी गति में आ जाती है किन्तु धूल के कण अपनी पूर्वावस्था में ही रहते हैं, अतः दरी से अलग हो जाते हैं।

2. गति का जड़त्व :

◈ वस्तु का वह गुण, जिसके-कारण वह अपनी एकसमान गति की अवस्था में परिवर्तन नहीं कर सकती अर्थात् एक समान गति करती हुई वस्तु स्वयं न तो त्वरित होती है अथवा न ही अवमंदित।

उदाहरण :

(i) जब किसी बस़ अथवा ट्रेन को अचानक रोक़ दिया जाता है, तब उसमें बैठे यात्री आगे की ओर झुक जाते हैं, क्योंकि उनके शरीर का निचला हिस्सा बस अथवा ट्रेन के साथ विरामावस्था में आ जाता है किन्तु ऊपरी हिस्सा गति के जड़त्व के कारण आगे की ओर गतिमान रहता है।

(ii) चलती ट्रेन से कूदने पर व्यक्ति-आगे की ओर (रेलगाड़ी की दिशा में) गिरने लगता है।

(iii) लंबी कूद के धावक लंबी कूद से पहले कुछ दूरी तक दौड़ते हैं, क्योंकि दौड़ने पर प्राप्त वेग लंबी कूद लगाने के वेग में जुड़ जाता है। अतः वह ज्यादा दूरी तक कूद सकता है।

3. दिशा का जड़त्व :

◈ वस्तु का वह गुण, जिसके कारण वह स्वयं की गति की दिशा में परिवर्तन नहीं कर सकती दिशा का जड़त्व कहलाता है।

उदाहरण:

(i) जब किसी पत्थर को धागे से बाँधकर वृत्तीय मार्ग में घुमाया जाता है अथवा अचानक धागे को छोड़ दिया जाए तो पत्थर दिशा के जड़त्व के कारण वृत्त की स्पर्शज्या के अनुदिश गति करता हुआ गिर जाता है, क्योंकि धागे का खिंचाव बल पत्थर की वृत्तीय गति में सहायक होता है। जैसे ही धागे को छोड़ा जाता है, खिंचाव बल समाप्त हो जाता है, तथा पत्थर एक सीधी रेखा के अनुदिश वृत्त की स्पर्श रेखा में गति करता हुआ गिर जाता है।

(ii) किसी वाहन का घूर्णन करता हुआ पहिया कीचड़ को पहिए की स्पर्शज्या के अनुदिश बाहर की ओर फेंकता है, ऐसा दिशा के जड़त्व के कारण होता है।

(iii) जब कोई कार अचानक वक्राकार मार्ग पर चलने लगती है. तब अंदर बैठे व्यक्ति बाहर की ओर गिरने लगते हैं।

न्यूटन का द्वितीय नियम (Newton's Second Law)

◈ वस्तु के रेखीय संवेग परिवर्तन की दर उस वस्तु पर लगाये गये बाह्य बल के समानुपाती होती है तथा यह परिवर्तन हमेशा लगाये गये बल की दिशा में ही होता है।

◈ यदि m द्रव्यमान की वस्तु, $\vec{v}$ वेग से गति करती है, तब इसका रेखीय संवेग $\vec{p} = m\vec{v}$ से दिया जा सकता है एवं यदि वस्तु पर लगाया गया बल $\vec{F}$ है, तब

$$\vec{F} \propto \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow F = K\frac{d\vec{p}}{dt}$$

अथवा $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (CGS अथवा SI पद्धति में K=1)

अथवा $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

($a = \frac{d\vec{v}}{dt} =$ वस्तु में उत्पन्न त्वरण)

$$\therefore \vec{F} = m\vec{a}$$

बल = द्रव्यमान × त्वरण

◈ न्यूटन का द्वितीय नियम बल की गणनात्मक परिभाषा देता है।

◈ न्यूटन का प्रथम व तृतीय नियम, द्वितीय नियम से प्राप्त किये जा सकते हैं, इसलिए द्वितीय नियम तीनों नियमों में आधारमूत नियम है।

बल (Force)

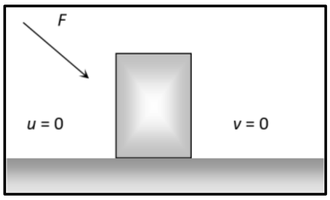
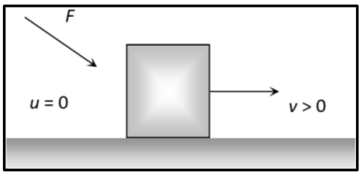
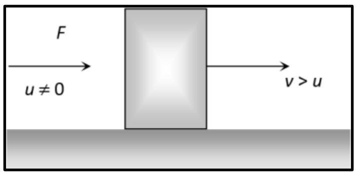
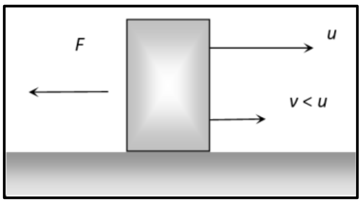
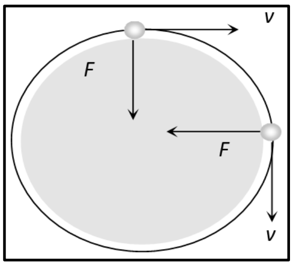
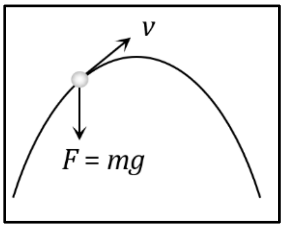
◈ बल वह बाह्य कारक अथवा प्रभाव है, जो किसी वस्तु को खींचकर अथवा धकेलकर

(i) विरामावस्था में रखी वस्तु. में गति उत्पन्न करता है अथवा गति उत्पन्न करने का प्रयास करता है।

(ii) गतिशील वस्तु को विरामावस्था में लाता है अथवा लाने का प्रयास करता है।

(iii) वस्तु की गति की दिशा में परिवर्तन करता है अथवा करने का प्रयास करता है।

(iv) विरामावस्था में स्थिति पिण्ड का आकार बदल देता है अथवा बदलने का प्रयास करता है।

बल अनुप्रयोग की विभिन्न स्थितियाँ-	
	वस्तु विरामावस्था में रहती है ! यहाँ बल वस्तुं की विराम अवस्था में परिवर्तन का प्रयास करता है।
	वस्तु गति करना प्रारंभ कर देती है, यहाँ बल वस्तु की विरामावस्था में परिवर्तन कर देता-है।
	सूक्ष्म समयांतराल में, बल वेग का परिमाण बढ़ा देता है तथा गति की दिशा पूर्व की भाँति रहती है।
	सूक्ष्म समयांतराल में, बल वेग क़ा परिमाण घटा देता है, तथा गति की दिशा पूर्व की भाँति रहती है।
	एकसमान वृत्तीय गति में केवल वेग की दिशा में पारिवर्तन होता है। चाल नियत रहती है तथा बल की दिशा वेग की दिशा के लंबवत् होती है।
	असमान वृत्तीय गति, दीर्घवृत्तीय गति, परवलयकार गति या अतिपरवलयाकार गति में बल गति की दिशा से किसी कोण पर कार्यरत रहता है। इन सभी गतियों में, वेग की दिशा तथा परिमाण दोनों परिवर्तित होते हैं।

- ◈ विमाएँ : बल = द्रव्यमान × त्वरण
  $[F] = [M][LT^{-2}] = [MLT^{-2}]$
- ◈ **मात्रक :**
  निरपेक्ष मात्रक (i) न्यूटन (SI)
  (ii) डाइन (CGS)
  गुरुत्वीय मात्रक : (i) किलोग्राम भार (MKS)
  (ii) ग्राम भार (CGS)
- ◈ **न्यूटन :** एक न्यूटन वह बल है, जो 1 किलोग्राम द्रव्यमान की वस्तु पर आरोपित करने पर उसमें $1 m/s^2$ का त्वरण उत्पन्न-कर देता-है।
  $\therefore$ 1 न्यूटन = $1 \mathrm{kgm/s^2}$
- ◈ **डाइन :** 1 डाइन वह बल है, जो 1 ग्राम द्रव्यमान की वस्तु में आरोपित करने पर उसमें $1\ \mathrm{cm/s^2}$ का त्वरण उत्पन्न कर देता है।
  $\therefore$ 1 डाइन = $1 \mathrm{gmcm/sec^2}$
- ◈ **बल के निरपेक्ष मात्रकों के बीच सम्बन्ध,**
  1 न्यूटन = 10^5 डाइन
- ◈ **किलोग्राम भार :** यह वह बल है, जो 1 किलोग्राम द्रव्यमान की वस्तु में आरोपित करने पर उसमें $9.8\ \mathrm{m/s^2}$ का त्वरण उत्पन्न कर देता है।
  $\therefore 1 - kg - f = 9.80$ न्यूटन
- ◈ **ग्राम भार :** यह वह बल है जो 1 ग्राम द्रव्यमान की वस्तु पर आरोपित करने पर उसमें $980\ \mathrm{cm/s^2}$ का त्वरण उत्पन्न कर देता है।
  $\therefore 1gm - f = 980$ डाइन
- ◈ $\vec{F} = m\vec{a}$ सूत्र केवल तभी सत्य है, जब बल वस्तु की विराम अथवा गति की अवस्था में परिवर्तन कर दे तथा वस्तु का द्रव्यमान नियत तथा निश्चित हो।

प्रकृति में मूल बल

आकर्षण बल	सापेक्ष सामर्थ्य	भाग लेने वाले कण
गुरुत्वाकर्षण	1	ग्रेविटॉन
कमजोर नाभिकीय	10^{25}	न्यूट्रान और प्रति न्यूट्रान
विद्युत चुम्बकीय	10^{36}	फोटोन
शक्तिशाली नाभिकीय	10^{38}	पाई-मेसॉन एवं इडमेसॉन (पाइआनस)

◈ अनेक प्राकृतिक बलों में से, 10^{-15} मीटर की दूरी पर, नाभिकीय बल सर्वाधिक शक्तिशाली होता है, जबकि गुरुत्वीय बल अत्यंत दुर्बल होता है।
$F_{\text{नाभिकीय}} > F_{\text{विद्युत चुम्बकीय}} > F_{\text{कमजोर नाभिकीय}} > F_{\text{गुरुत्वाकर्षण}}$

◈ यदि बल तथा त्वरण के तीन घटक x, y, z अक्षों के अनुदिश हैं, तब $\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$ तथा $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$
अतः स्पष्ट है कि. $F_x = ma_x, F_y = ma_y, F_z = ma_z$

◈ जब बल को दिशा के बिना प्रदर्शित किया जाता है, तब धनात्मक बल का अर्थ प्रतिकर्षण तथा ऋणात्मक बल का अर्थ आकर्षण बल होता है।

◈ **उदाहरण :**
धनात्मक बल - दो समान आवेशों के बीच बल
ऋणात्मक बल - दो असमान आवेशों के बीच बल

◈ दो इलेक्ट्रोनों के बीच विद्युत बल तथा गुरुत्वीय बल का अनुपात $F_e/F_g = 10^{43}$ $\therefore F_e \gg F_g$

◈ **नियत बल :** यदि बल की दिशा तथा परिमाण नियत रहें, तब इसे नियत अथवा स्थिर बल कहते हैं।

◈ **परिवर्ती बल अथवा आश्रित बल**

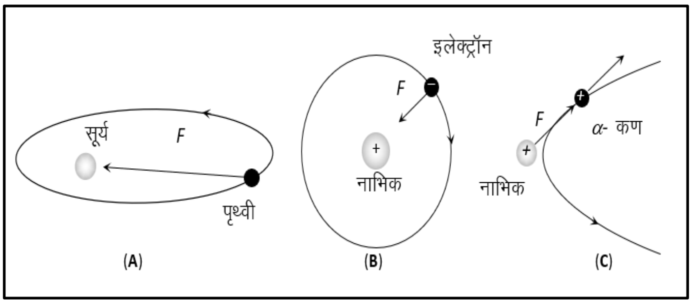
(i) समय पर निर्भर बल :
आवेश तथा प्रत्यावर्ती विद्युत क्षेत्र में आवेशित कण की गति में बल समय पर निर्भर करता है।

(ii) स्थिति पर निर्भर बल :
दो पिण्डों के बीच गुरुत्वाकर्षण बल $\frac{Gm_1m_2}{r^2}$
अथवा दो आवेशित कणों के बीच बल $= \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

(iii) वेग पर निर्भर बल :
श्यान बल ($6\pi\eta rv$)
चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण पर बल $(quB\sin\theta)$

◈ **केन्द्रीय बल :**

◈ यदि स्थिति पर निर्भर करने वाले बल $\left(F \propto \frac{1}{r^2}\right)$ की दिशा हमेशा एक निश्चित बिन्दु की ओर अथवा उससे दूर की ओर होती है, तब इसे केन्द्रीय बल कहते हैं।
उदाहरण : कूलाम बल, गुरुत्वाकर्षण बल



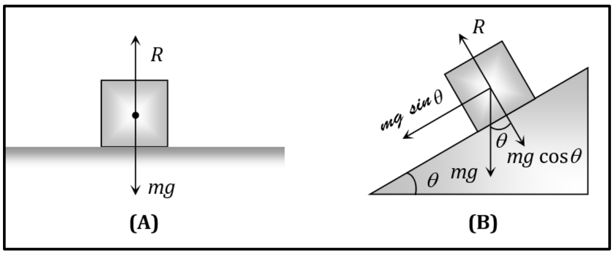
◈ **संरक्षी अथवा असंरक्षी बल :** यदि किसी बल के प्रभाव में एक पूर्ण चक्कर में किया गया कार्य शून्य होता है अथवा किया गया कार्य मार्ग पर निर्भर नहीं करता अथवा गतिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता है लो बल संरक्षी प्रकार का अन्यथा असंरक्षी प्रकार का कहलाता है। उदाहरण-
संरक्षी बल : गुरुत्वाकर्षण बल, वैद्युत बल, प्रत्यास्थ बल इत्यादि।
केन्द्रीय बल संरक्षी बल होते हैं।

◈ **असंरक्षी बल :** घर्षण बल, श्यान बल इत्यादि।

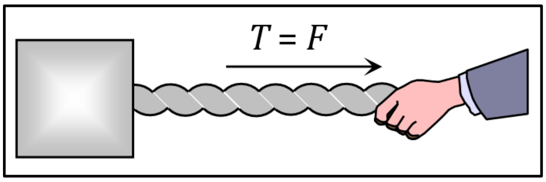
◈ **यांत्रिकी में प्रचलित कुछ बल**

(i) भार : किसी वस्तु का भार वह बल है, जिससे पृथ्वी उसे आकर्षित करती है। इसे गुरुत्वीय अथवा गुरुत्वाकर्षण बल भी कहते हैं।

(ii) प्रतिक्रिया अथवा अभिलम्ब बल : जब किसी वस्तु को एक दृढ़ सतह पर रखा जाता है, तब वस्तु पर उसकी संपर्क सतहों के अभिलंबवत् एक बल लगता है, जिसे प्रतिक्रिया अथवा अभिलम्ब बल कहते हैं।



(iii) तनाव : किसी तनी हुई रस्सी, धागे अथवा चेन द्वारा आरोपित बल के विरुद्ध लगायें गये बल को तनाव कहते हैं। इसकी दिशा सदैव वस्तु से दूर की ओर होती है, क्योंकि तनाव सदैव वस्तु को खींचता है। तनाव बल विद्युत चुम्बकीय बल होता है।



(iv) स्प्रिंग बल : प्रत्येक स्प्रिंग इसकी लंबाई में होने वाले परिवर्तन का विरोध करती है। यह प्रतिरोधी बल लंबाई में परिवर्तन के साथ बढ़ता है। स्प्रिंग, बल को निम्न प्रकार से प्रदर्शित करते हैं, $F \doteq -Kx$; जहाँ x लंबाई में परिवर्तन तथा K स्प्रिंग नियतांक (मात्रक न्यूटन/मी) है।